ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Faggruppen for filosofi og videnskabsteori

ROSKILDE UNIVERSITY CENTRE
Section for philosophy and science studies

FILOSOFI OG VIDENSKABS-TEORI PÅ ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

3. Række: Preprints og reprints
1995 Nr. 2

«LES QUATRE CÔTÉS ET L'AIRE»

Sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes

Par JENS HØYRUP

«Les quatre côtés et l'aire»

Sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes

Par Jens Høyrup

A la mémoire de Ludovica

Un front qui s'appuie
A moi dans la nuit
Deux grands yeux ouverts
Et tout m'a semblé
Comme un champ de blé
Dans cet univers

Le présent texte a été publié dans *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*. Actes de la première Université d'été européenne, Montpellier 10 au 13 juillet 1993, pp. 507–531. (Montpellier: IREM de Montpellier, 1995). À cause d'une conversion mal faîte et de l'omission d'épreuve d'auteur, pourtant, cette version contient environ 275 erreurs, y compris l'omission d'un passage de 36 lignes.

L'essai dessous retrace l'histoire d'un problème mathématique particulier: comment trouver le côté d'un carré si l'on connaît la somme des quatre côtés et l'aire? La question apparaît pour la première fois dans une tablette paléo-babylonienne, et survit dans une forme pratiquement identique chez Luca Pacioli. Comme on le verra, le problème appartient (avec toute une famille de problèmes quasi-algébriques «de récréation» traitant de carrés et de rectangles) à une tradition non-scolaire de géomètres pratiques. Cette «algèbre d'arpenteur», oubliée elle-même aujourd'hui, a influencé trois grandes traditions mathématiques savantes: l'algèbre babylonienne, la géométrie «métrique» grecque (Euclide, *Éléments* II, etc.), et l'*al-jabr* arabe.

I. Un «problème carré» paléo-babylonien

Un texte mathématique cunéiforme souvent discuté[1] contient comme 23ème et avant-dernier problème le suivant:

> Un champ. Les quatre fronts et le champ j'ai accumulés: 41´40´´.
> 4, les quatre fronts, tu inscris. L'inverse de 4 est 15´.
> 15´ tu élèves à 41´40´´. 10´25´´ tu inscris.
> 1, le forjet, tu ajoutes: 1°10´25´´ fait que 1°5´ soit équilatéral.
> 1, le forjet que tu as ajouté, tu arraches: 5´ jusqu'à deux fois
> tu répètes. 10´ n i n d a n se confronte.

Le texte a été écrit au milieu de l'époque paléo-babylonienne, probablement au 18ème siècle avant J.-C. Il semble avoir contenu 24 problèmes (quelques parties sont détruites) de caractère «algébrique» traitant d'un seul ou de plusieurs carrés et de leurs côtés.

La traduction cherche à refléter la terminologie babylonienne dans ses détails[2]. Les nombres sont exprimés selon le système (degrés–minutes–

---

[1] [Éd. MKT III, 1–5]. La traduction est la mienne, comme toutes les traductions françaises qui suivent.

[2] Voir [Høyrup 1990:45–69], où les principes de la traduction ainsi que les opérations et les termes particuliers sont discutés. Cette publication explique aussi les raisons pour lesquelles l'interprétation habituelle de «l'algèbre» babylonienne comme une algèbre numérique ou rhétorique n'est pas tenable, ainsi que celles qui conduisent à l'interprétation comme «géométrie naïve» de découpage et de rassemblement.

secondes–...) de Thureau-Dangin – 1°10´25´´ est donc à interpréter comme $1+{}^{10}/_{60}+{}^{25}/_{(60\cdot 60)}$: comme on sait, les nombres des textes mathématiques babyloniens sont écrits selon un système de position à base 60, au 1°10´25´´ de la traduction correspond simplement 1 10 25 dans le texte. «Accumuler» (*kamārum* en akkadien) est une addition vrai, où les composants sont à ainsi dire absorbés dans la somme, et permet l'addition de nombres dont la somme n'a aucun sens concret (comme ici, longueurs plus aire). Par contre, «ajouter» (*waṣābum*) est une addition concrète, un greffage d'une entité sur une autre qui conserve son identité (comme l'adjonction des intérêts de l'année ne change pas l'identité de *mon* compte bancaire).

«Élever» (*našûm*) à *n* signifie un calcul par multiplication (une métaphore basée sur l'idée que la base soit élevée jusqu'au niveau de l'hauteur dans le calcul des volumes). Ainsi, «élever» à l'inverse de 4 (donc, à ${}^{1}/_{4}$ = 15´) est une manière (la manière courante babylonienne) de diviser par 4. Une autre opération multiplicative utilisée dans notre texte est la «répétition» (concrète). Une troisième, absente du texte présent mais très importante dans le corpus «algébrique», consiste à «faire que [les longueurs] *a* et *b* se tiennent [comme côtés d'un rectangle]»[3], avec la variante (ci-présente) «faire que *s* se confronte lui-même» (comme côté d'un carré). L'inverse de cette dernière opération est de trouver la longueur *s* «faite équilatérale par *Q*», c'est-à-dire, la longueur *s* qui sera le côté si l'aire *Q* est formée en carré (numériquement, $s = \sqrt{Q}$).

«1, le forjet», finalement, est une droite qui, avec une autre (ici le côté *s* du carré), contient un rectangle d'aire $1\cdot s = s$. Le n i n d a n (≈ 6m) est l'unité de base pour les distances horizontales.

Nous sommes donc en état de suivre le texte: Dans un champ [quadratique], la somme des nombres mesurant *les quatre* côtés (non pas 4 fois le côté, c'est clair dans le texte) et l'aire est 41´40´´ – (mé-)traduite en notation moderne, si *s* désigne le côté, s^2+4s = 41´40´´[4]. La deuxième ligne prépare la division par 4, qui s'effectue en troisième ligne – transformant, dans notre

---

[3] Une dernière multiplication, «*a* pas de *b*» (employée dans les tables de multiplication), est pratiquement absente des textes «algébriques».

[4] C'est cette traduisibilité des problèmes (et des procédures) qui justifie en première instance qu'on parle couramment d'«algèbre» babylonienne.

traduction, l'équation en $(\frac{s}{2})^2+1\cdot s$ = 41´40´´/4 = 10´25´´. Pour nous, l'addition de 1 dans la quatrième ligne produirait $(\frac{s}{2})^2+2\cdot 1\cdot(\frac{s}{2})+1$ = 1°10´25´´, d'où $\frac{s}{2}+1 = \sqrt{1°10´25´´}$ = 1°5´, $\frac{s}{2}$ = 1°5´–1 = 5´ – et finalement s = 10´.

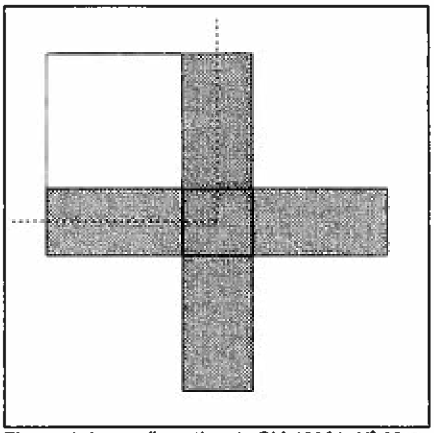

Figure 1. La configuration de BM 13901, N° 23.

Numériquement, cette séquence se retrouve dans le texte. Mais pourquoi le «forjet», et pourquoi ajouter 1 tout court au lieu de 1^2 (comme c'est l'habitude inébranlable des Babyloniens)? La réponse est donné en Figure 1: Chacun des côtés est pourvu d'un forjet; en conséquence, la configuration cruciforme qui en résulte a l'aire $s{\times}s+4{\times}s$ = 41´40´´[5]. La division par 4 signifie qu'un gnomon d'aire 10´25´´ est regardé séparément. Ce gnomon est complété géométriquement; ici il faut savoir que les babyloniens concevaient un carré comme «étant» son côté et «possédant» une aire (tandis que pour nous, comme on sait, il «est» de 4 m^2 et «possède» un côté de 2 m)[6]. Le carré complémentaire est déjà là, tenu par deux forjets identiques; pas besoin de le construire – et pour l'identifier, il suffit de parler de son représentant, un des exemplaires de ce même forjet. L'aire du carré complété est donc 10´25´´+1 = 1°10´25´´, et son côté $\sqrt{1°10´25´´}$ = 1°5´. Pour trouver le côté du champ on enlève le forjet qui était ajouté, et on double le demi-côté qui en résulte pour trouver ce qui «se confronte», c'est-à-dire le côté du champ carré.

La procédure est «naïve», au sens qu'on *voit* directement qu'elle est correcte, sans sentir par exemple le besoin d'une démonstration explicite

---

[5] J'emploierai dorénavant le signe × pour traduire en symboles l'opération «faire que se tiennent» et pour la multiplication qui y correspond. Quand il faudra distinguer entre la formation d'un carré du côté *a* et celle d'un rectangle à côtés *a* et *b*, le premier sera désigné □(*a*) et le second ⊏⊐(*a*,*b*).

[6] Le *dýnamis* des géomètres grecs est donc compris comme le carré babylonien – voir [Høyrup 1990b].

que le gnomon en est vraiment un et qu'il contient un carré; une telle «critique» dut attendre l'époque grecque («critique» prise dans un sens quasi-Kantien: vérification que ce qu'on croit ou fait d'habitude est vraiment justifié, ou recherche des conditions qu'il le soit). L'exactitude du procédé se voit cependant sans difficulté, bien que «naïvement», et sa description est donc algorithme et justification à la fois (je dois cette formule à Karine Chemla), comme l'est la solution d'une équation moderne. Il peut aussi être caractérisé comme «analytique», au sens que le côté inconnu est traité comme s'il était connu dans une série de manipulations géométriques qui, à la fin, le dégagent de l'enchevêtrement initial. Si l'on comprend l'algèbre comme l'application de l'analyse (comme le voulait Viète), alors la méthode est clairement algébrique; pourtant, si on la voit comme une science du nombre (ou de nombre généralisé), «l'algèbre» paléo-babylonienne des droites mesurées ou mesurables n'en est pas une.

A bien des égards, le problème des quatre côtés et l'aire est similaire aux autres textes «algébriques»: eux aussi distinguent deux «additions» différentes, deux «soustractions» et quatre opérations multiplicatives; eux aussi utilisent la technique »naïve« de découpage et de rassemblement; eux aussi sont algorithme et justification à la fois. Sous d'autres rapports, pourtant, le texte que nous venons de discuter est tout à fait unique.

Si Q désigne l'aire d'un carré, s le côté correspondant (Q_i et s_i s'il y en a plusieurs), et ${}_4s$ «les quatre» côtés, la liste complète des problèmes contenus dans notre tablette est comme suit (n` désigne $n \cdot 60^1$):

1. $Q+s = 45'$
2. $Q-s = 14`30$
3. $Q-\frac{1}{3}Q+\frac{1}{3}s = 20'$
4. $Q-\frac{1}{3}Q+s = 4`46°40'$
5. $Q+s+\frac{1}{3}s = 55'$
6. $Q+\frac{2}{3}s = 35'$
7. $11Q+7s = 6°15'$
8. $Q_1+Q_2 = 21'40''$, $s_1+s_2 = 50'$ (reconstruction)
9. $Q_1+Q_2 = 21'40''$, $s_2 = s_1+10'$
10. $Q_1+Q_2 = 21°15'$, $s_2 = s_1-\frac{1}{7}s_1$
11. $Q_1+Q_2 = 28°15'$, $s_2 = s_1+\frac{1}{7}s_1$
12. $Q_1+Q_2 = 21'40''$, $\sqsubset\sqsupset(s_1,s_2) = 10'$
13. $Q_1+Q_2 = 28'20''$, $s_2 = \frac{1}{4}s_1$

14. $Q_1+Q_2 = 25'25''$, $s_2 = \frac{2}{3}s_1+5'$
15. $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4 = 27'5''$, $(s_2,s_3,s_4) = (\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3})s_1$
16. $Q-\frac{1}{3}s = 5'$
17. $Q_1+Q_2+Q_3 = 10`12°45'$, $s_2 = \frac{1}{7}s_1$, $s_3 = \frac{1}{7}s_2$
18. $Q_1+Q_2+Q_3 = 23'20''$, $s_2 = s_1+10'$, $s_3 = s_2+10'$
19. $Q_1+Q_2+\square(s_1-s_2) = 23'20''$, $s_1+s_2 = 50'$
20. [détruit]
21. [détruit]
22. [détruit]
23. ${}_4s+Q = 41'40''$
24. $Q_1+Q_2+Q_3 = 29'10''$, $s_2 = \frac{2}{3}s_1+5'$, $s_3 = \frac{1}{2}s_2+2'30''$

Le numéro 23, nous le voyons, est seul à considérer «les quatre côtés»; il est aussi le seul à mentionner les côtés avant l'aire. Il n'est certainement pas le seul problème mixte de second degré et normalisé, mais tous les autres utilisent une même méthode standardisée (couper le rectangle $a\times s$ représentant les a côtés en deux moitiés, les faire tenir un carré complémentaire $\square(\frac{a}{2})$, etc. – voir Figure 2[7]. Le procédé du N° 23, au contraire, dépend crucialement de la présence d'exactement 4 côtés. En ce moment déjà nous pouvons remarquer que cet emploi d'une recette étonnante et élégante, mais sans validité générale, sert à classifier le problème comme une énigme plutôt que comme un morceau mathématique (babylonien ou moderne). Du style d'une énigme fait penser aussi le renvoi au quatre côtés que possède réellement le carré, au lieu d'un multiple arbitraire du côté.

De plus, tous les autres problèmes se présentent comme traitant d'un *mitḫartum* (ou de plusieurs), le mot qui désigne à la fois la configuration quadratique et la mesure du côté, et qui appartient au langage «algébrique» coutumier. Le N° 23 est le seul à expliquer d'abord qu'il traite d'un champ, en indiquant par son choix de formes grammaticales, par son vocabulaire (les «fronts») et par la référence explicite à l'unité métrologique qu'on doit penser à un champ réel; le seul aussi à laisser la configuration géométrique exacte sous-entendue.

---

[7] Plus en détail: l'aire totale C et a étant connus, l'aire du gnomon (également C) et du carré complété $(C+(\frac{a}{2})^2)$ le sont aussi, et donc le côté S du dernier – d'où $s = S-\frac{a}{2}$. Synthétiquement on a $\sqsubset\!\sqsupset(s,s+a)+\square(\frac{a}{2}) = \square(s+\frac{a}{2})$ – c'est-à-dire rien d'autre qu'Euclide, *Éléments* II.6.

Même la valeur du côté est remarquable. Tous les autres problèmes de notre tablette traitant d'un seul carré conduisent à un coté de 30 (souvent dans l'ordre des minutes, donc 30′), sauf N° 4 (s = 20). Les mêmes valeurs se retrouvent dans tous les autres textes, ce qui est peut-être à expliquer par la valeur «ronde» de ces nombres dans le système sexagésimal (30′ = $\frac{1}{2}$, 20′ = $\frac{1}{3}$). Un côté 10 se retrouve seulement dans les problèmes regardant plusieurs carrés, et seulement comme conséquence de l'habitude de prendre toujours les différences entre côtés égales à 10 ou 5, et les proportions comme 1:4 ou 1:7 (voir [Høyrup 1993]). Jamais, sauf dans BM 13901 N° 23, on ne trouve un côté de 10 (ici 10′) comme choix délibéré à partir duquel le problème est construit.

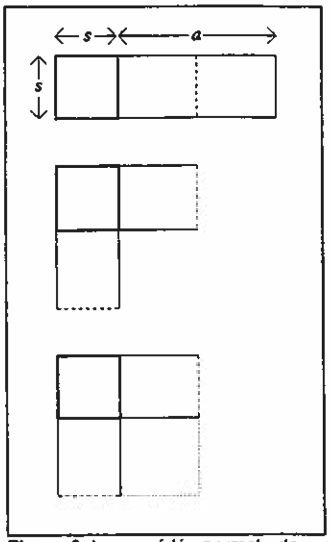

Figure 2. Le procédé »normal« de BM 13901 pour les problèmes $Q+\alpha s = C$.

Le dernier mystère est l'endroit où se trouve le problème des quatre côtés. Sauf le N° 16, qui semble pour d'autres raisons avoir été déplacé, les problèmes de type $\alpha Q \pm \beta s = C$ se trouvent tous au commencement du texte, et les voisins de N° 23 sont tous bien plus complexes. Il semble que la différence de méthodes telle qu'elle est reflétée dans le contraste entre les Figures 1 et 2, était comprise comme une différence de genres mathématiques par l'auteur du texte.

II. Les démonstrations d'al-jabr

Nulle autre tablette babylonienne nous parle des quatre côtés d'un carré, ni ne fait usage de la méthode particulière de la Figure 1. Des parallèles ne se retrouvent qu'à l'aube du neuvième siècle (ère chrétienne).

Ce fut le moment où le Calife al-Ma'mūn invita al-Khwārizmī a composer un traité sur les parties les plus «brillantes» (*latīf*) et les plus utiles de l'art d'*al-jabr wa'l muqābalah*[8]. Al-Khwārizmī n'est donc pas à considérer comme l'inventeur de cette technique (latinisée comme *algebra*). Une génération après, Thābit ibn Qurrah dans un petit ouvrage raconte en effet qu'elle appartient au cercle des «gens (ou praticiens) d'*al-jabr*», apparemment quelque groupe de calculateurs professionnels. Après encore une ou deux générations, pourtant, Abū Kāmil en parle exclusivement comme la discipline d'al-Khwārizmī – et al-Khwārizmī semble en effet (avec son contemporain ibn Turk) l'avoir recoulé, en particulier en ce qui concerne le traitement des problèmes de deuxième degré qui constituent l'axe principal.

Là où *nous* cherchons x à partir de $x^2+10x = 39$, les «praticiens d'*al-jabr*» trouveraient un Avoir et sa Racine, étant donné que *l'Avoir avec 10 de ses Racines égale 39 dirhems*[9]. L'inconnue fondamentale est donc *l'Avoir*, un montant d'argent, et une meilleure interprétation symbolique serait $y+10\sqrt{y} = 39$; *la Racine* est la racine carrée de l'Avoir, et n'a rien a voir avec l'idée – développée seulement quand la doctrine d'al-Khwārizmī fut réinterprétée bien plus tard – d'une *racine de l'équation*. Bien sûr, l'on cherche d'abord la Racine, mais ceci pour des raisons pragmatiques évidentes: on prend la moitié des 10, on la carre, et l'on ajoute les 25 qui

[8] Ceci, al-Khwārizmī nous le dit dans sa préface ([Rosen (éd., trad.) 1831:3], avec les corrections de Ruska [1917:5]). Comme j'ai montré ailleurs [Høyrup 1991], la traduction latine du traité d'al-Khwārizmī faite par Gérard de Crémone au 12ème siècle [éd. Hughes 1986] est à préférer au manuscrit arabe sur lequel la dernière édition arabe [Mušarrafah & Aḥmed 1939] aussi bien que toutes les traductions modernes sont basées, le texte du manuscrit arabe ayant été remanié à plusieurs reprises. Gérard a pourtant omis la préface ainsi que les parties traitant de la géométrie pratique et de l'algèbre des héritages, pour lesquels il faut se fier pour le moment au manuscrit d'Oxford et à ses éditeurs et traducteurs.

[9] Pour éviter toute équivoque, j'écrirai ces entités algébriques avec une majuscule initiale (les textes arabes, bien sûr, ne font pas cette distinction entre Racine et l'idée générale de racine [carré]). L'Avoir est le *census* des traductions latines, qu'on traduit normalement «le carré», présupposant une pensée plus moderne, ce qui a donné lieu à beaucoup de confusion – en particulier dans les cas où il n'y a pas de racine et que l'Avoir est donc une inconnue de premier degré (voir un bel exemple dans [Libri 1838:I,304f]).

en résultent à 39, ce qui donne 64. De la racine de ces 64 on soustrait «la moitié des Racines» (donc 5), après quoi nous reste la Racine (3). Par conséquence, l'Avoir sera $3^2 = 9$.[10]

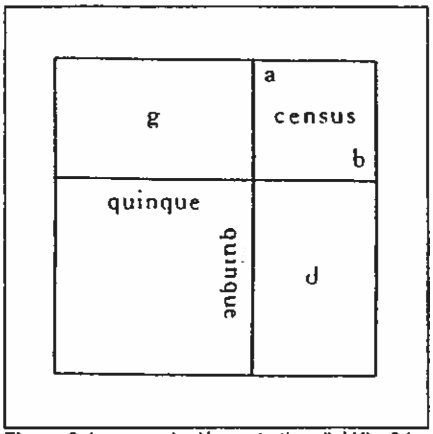

Figure 3. La seconde démonstration d'al-Khwārizmī. D'après [Hughes 1986:238].

Ce précepte est donné par al-Khwārizmī et répété par Thābit, et doit ainsi appartenir à l'héritage commun des praticiens. Ce qui est nouveau dans la présentation d'al-Khwārizmī est le fait qu'il donne des démonstrations géométriques que la recette traditionnelle (ainsi que les autres, pour les cas *Avoir et Nombre égale Racines* et *Racines et Nombre égalent Avoir*) est valable. Comme dans les textes grecs traduits par les collègues d'al-Khwārizmī à la cour de Bagdad, les points sont identifiés par les lettres de l'alphabet (mais des aires aussi, ce qui n'était pas une habitude grecque); en essence, pourtant, les démonstrations d'al-Khwārizmī ne se distinguent des procédés babyloniens rencontrés plus haut que par une présentation plus rigoureuse et donc moins «naïve».

Pour le premier cas, celui où *Un Avoir avec 10 Racines égale 39 dirhems*, al-Khwārizmī donne deux démonstrations différentes. La seconde (voir Figure 3, prise de la traduction de Gérard) correspond précisément à l'algorithme à justifier, et coïncide dans son principe avec la Figure 2. La première correspond à une formule différente, la détermination de la Racine comme $\sqrt{[({}^{10}/_4)^2 \cdot 4+39)]}-2\cdot{}^{10}/_4$. Sa base géométrique (voir Figure 4) correspond à la Figure 1. Le texte lui-même n'offre aucune raison pour l'emploi d'une figure qui s'accorde si mal avec le calcul actuel (ailleurs, al-Khwārizmī ne démontre aucun intérêt spécial pour la symétrie). Si la figure est là,

[10] Que l'Avoir est la vraie inconnue est confirmé par Abū Kāmil [éd., trad. Levey 1966:36] quand il démontre qu'on peut le trouver directement, sans la détermination – essentiellement superflue – de sa racine.

et en première place[11], il faut, ou qu'al-Khwārizmī lui-même y ait pensé d'abord, ou qu'il s'attende que son lecteur le fasse. Elle a donc dû être bien connue dans le milieu que connaissait al-Khwārizmī – non pas comme appartenant à la tradition d'*al-jabr* mais à une autre.

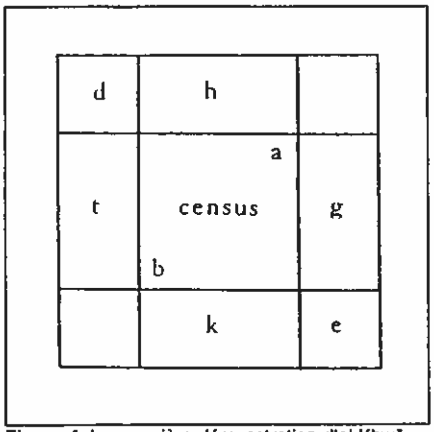

Figure 4. La première démonstration d'al-Khwārizmī. D'après [Hughes 1986:237].

III. Abū Bakr et «l'algèbre d'arpenteur»

Cette hypothèse est confirmée par le *Liber mensurationum* d' un certain Abū Bakr, écrit – des observations sur la terminologie le suggèrent – à peu prés à la même époque (voir [Høyrup 1986, 1992]). Le texte arabe n'a pas été identifié, mais Gérard de Crémone en a fait une traduction latine très précise [éd. Busard 1968]. En outre, comme nous le verrons, Léonard de Pise l'a utilisé dans son *Pratica geometrie*.

D'après son titre, l'ouvrage concerne la géométrie pratique, ce qui n'est pas complètement faux. Les premiers paragraphes du chapitre initial, par exemple, expliquent comment trouver l'aire et la diagonale d'un carré si le côté est connu. Ensuite, pourtant, Abū Bakr continue avec des problèmes «brillants» dépourvus d'intérêt pratique, dont la plupart requièrent un traitement de style «algébrique»:

1. $s = 10$: Q?
2. $s = 10$: d?
3. $s+Q = 110$: s?
4. ${}_4s+Q = 140$: s_u?
5. $Q-s = 90$: s?
6. $Q-{}_4s = 60$: s_u?
7. ${}_4s = \frac{2}{5}\cdot Q$: s_u?

---

[11] Il y a même des indications que cette première démonstration ait été la seule dans une première version du traité – elle est nettement plus «naïve» en style que celles qui suivent. Voir [Høyrup 1991].

8. ${}_4s = Q$: s_u?
9. ${}_4s-Q = 3$: s_u? (avec la solution double)
10. $d = \sqrt{200}$: s?
11. $d = \sqrt{200}$; Q?
12. ${}_4s+Q = 60$: s_u?
13. $Q-3s = 18$: s?
14. ${}_4s = \frac{3}{8}\cdot Q$: s_u?[12]
15. $Q/d = 7\frac{1}{2}$: s_u?
16. $d-s = 4$: s?
17. $d-s = 5$ (aucune question, renvoi au cas précédent).
18. $d = s_u+4$: s? (aucun renvoi au N° 16).
19. $Q/d = 7\frac{1}{14}$: s?, d?

Ici, Q désigne encore l'aire, s le côté et ${}_4s$ les quatre côtés (ou simplement «les côtés») d'un carré, tandis que d dénomme la diagonale et s_u «chacun des côtés» (ci-dessous, A désignera l'aire d'un rectangle, et l_1 et l_2 les côtés).

Même les chapitres qui suivent immédiatement, ceux qui traitent des rectangles (regardés comme des «carrés plus longs d'un côté») et des losanges, sont dominés par des problèmes quasi-algébriques; c'est seulement quand vient le tour des trapèzes et des triangles que domine le vrai calcul géométrique, de type plutôt alexandrin ou Héronien. Pour des raisons que j'exposerai plus bas, je désignerai dorénavant le quasi-algèbre des premiers chapitres comme «algèbre d'arpenteur».

Dans le premier chapitre on remarque le retour des «quatre côtés et l'aire» (N° 4, et avec un paramètre numérique différent dans le N° 12). Encore une fois, les côtés sont mentionnés les premiers – dans le *Liber mensurationum* c'est la norme, tandis que l'*al-jabr* met toujours l'Avoir avant les Racines. On observe aussi que tous les problèmes qui parlent de côtés, à part le N° 13, traitent *d'un côté* ou des *quatre côtés* (le même lien au palpable ou au «naturel» se retrouvera dans l'étude des rectangles et des autres figures). Finalement on découvre que le côté du «carré normal» est

[12] Le texte est corrompu, ou peut-être intentionnellement obscure (comme l'est au fait N° 50). Léonard, à l'endroit correspondant [éd. Boncompagni 1862: 61], résout le problème ${}_4s+\frac{3}{8}Q = 77\frac{1}{2}$.

10, N^{os} 8–9 et 12–13 introduisant les seules exceptions vraies[13].

Souvent, Abū Bakr donne ce qu'il regarde comme deux solutions différentes pour ses problèmes quasi-algébriques. La première n'a pas de nom, et doit donc être celle qui appartient par coutume aux problèmes dans la tradition d'«algèbre d'arpenteur». L'autre est faite selon *al-jabr* (*aliabra* dans la traduction latine). Une traduction littérale[14] de quelques problèmes montrera leur relation mutuelle:

---

[13] N^{os} 16 et 18 (d–s = 4) semblent bâtir sur l'idée qu'à s = 10 correspond d = 14 (la solution donnée, pourtant, est exacte, $s = 4+\sqrt{32}$. N° 19 est construit à partir de $d = 14\frac{1}{7}$, l'approximation de la diagonale d'un carré 10×10 donnée au N° 2. La quasi-identité entre les N^{os} 16 et 18 suggère, finalement, que le «sept, et un demi» du N° 15 dérive, par erreur, du «sept, en un demi-septième» du N° 19.

On peut observer que N^{os} 12–13 semblent (d'après l'interprétation géométrique qui sera présentée ci-dessous) être dérivés «en cascade» des problèmes sur le carré 10×10. Au fait, le rectangle qui reste quand les quatre côtés sont soustraits de ce carré «normal» (10×6) coïncide avec celui dont parle N° 12: un carré de 6×6 augmenté de ses quatre côtés; N° 13, pour sa part, utilise le même carré que N° 12.

[14] Littérale sauf pour les nombres, où Gérard entremêle l'écriture romaine, l'écriture «hindou» et l'écriture en mots pleins – parfois dans le même nombre («centum et 40» au N° 4). Même le choix des formes grammaticales rend le texte latin aussi précisément que possible, parfois aux dépens du style français.

Les termes centraux de la traduction correspondent au latin comme suit:

ajouter: addare	*en effet:* enim
alors: ergo	*ensuite:* deinde
arriver: provenire	*joindre:* adiungere
au fait: namque	*mais:* autem
c'est-à-dire: quod est	*méthode:* modus
chacun des: unumquodque	*moins:* exceptis
chaque: quodque	*multiplicare:* multiplier
comprends: intellige	*opposer:* opponere
croissance: augmentatum	*par conséquent:* itaque
cumuler: aggregare	*pourtant:* vero
d'ailleurs: quoque	*procédé:* opus
déduire: minuere	*restaurer:* restaurare
déduit: diminutus	*rester:* remanere
diviser en deux: mediare	*te fut dit déjà:* tibi precessit
donc: igitur	*trouver:* invenire

3. Et s'il [un «quelqu'un» présenté au N° 1] t'aura dit: J'ai cumulé le côté et l'aire, et ce qui arriva fut 110. Combien alors est chaque côté?

   Le procédé dans cela sera que tu prends la moitié des côtés comme moitié et la multiplies par soi-même, et $\frac{1}{4}$ arrive, ajoute-le donc à 110, et ils seront $110\frac{1}{4}$; prends donc sa racine, qui est $10\frac{1}{2}$; déduis-en la moitié, et 10 resteront qui est le côté. Comprends.

   Il y a aussi pour cela une autre méthode selon *al-jabr*, qui est que tu poses le côté comme une Chose et multiplies celle-là par soi-même, et ce qui arrive sera un Avoir qui sera l'aire. Ajoute alors celui-ci au côté selon ce que tu as posé, et ce qui arrive sera un Avoir et une Chose qui seront égalés à 110. Fais alors selon ce qui te fut dit déjà en *al-jabr*, ce qui est que tu divises en deux la Chose et la multiplies par elle-même, et ce qui arrive tu ajoutes au 110, et tu prends la racine de ce qui est cumulé et déduis d'elle la moitié des Racines. En effet, ce qui reste, sera le côté.

4. Et s'il aura dit: J'ai cumulé ses quatre côtés et son aire, et ce qui arriva fut 140. Combien donc est chaque côté?

   Le procédé dans cela sera que tu divises en deux les côtés qui seront deux, multiplie-les alors par eux-mêmes, et 4 arrivent que tu ajoutes au 1⟨40, et ce qui arrive sera 1⟩44, dont tu prends la racine qui est 12; déduis-en la moitié des 4, ce qui reste alors est le côté, qui est 10.

. . . .

6. Et s'il aura dit: j'ai déduit ses côtés de son aire, et 60 sont restés. Combien alors est chacun des côtés?

   Le procédé en cela sera que tu divises en deux les côtés qui seront deux. Multiplie-les alors par eux-mêmes et ajoutes-y 60 et prends la racine de ce qui est cumulé qui est 8, ajoute donc à eux la moitié du nombre des côtés, et ce qui arrive sera 10 qui est le côté.

   Son procédé selon *al-jabr*, pourtant, est que tu poses le côté comme une Chose, laquelle tu multiplies par elle-même, et il arrive un Avoir qui est l'aire. Déduis donc de cela les côtés qui sont 4 Choses, il reste alors un Avoir moins 4 Choses qui est égalé à 60, restaure alors et oppose, c'est-à-dire que tu restaures l'Avoir par les 4 Choses déduites et les joins au 60, et tu auras alors un Avoir qui est égalé à 4 Choses et 60 dragmes. Fais alors selon ce qui te fut dit déjà dans la sixième question, c'est-à-dire que tu divises en deux les Racines et les multiplies par elles-mêmes et les joins au nombre et prend son racine, et ce qui arrive sera cela qui est 8. Joins donc à elle la moitié, et il arrive 10 qui sera le côté.

On remarque que les démarches numériques des deux méthodes supposées différentes coïncident (et qu'Abū Bakr le sait bien, comme le montre la phrase «ce qui arrive sera cela qui est 8»). Ce qui les distingue doit donc se trouver à un autre niveau (même si, dans certains cas, les procédés numériques des deux méthodes diffèrent entre eux, ce qui exclut l'hypothèse que la seconde procédure soit une explication théorique au moyen d'*al-jabr* d'un algorithme a-théorique proposé d'abord).

Al-jabr est évidemment la technique enseignée par al-Khwārizmī, et l'ouvrage d'Abū Bakr à donc dû être joint d'abord à un manuel sur ce sujet. Non pas, pourtant, comme complément au traité-même d'al-Khwārizmī, comme le montre l'emploi des termes «restauration» (*al-jabr*) et «opposition» (*al-muqābalah*). Chez al-Khwārizmī, *al-jabr* signifie (comme ici au N° 6) exclusivement l'addition qui élimine un membre soustractif, tandis qu'Abū Bakr «restaure» aussi un coefficient $\frac{1}{4}$ par multiplication; «l'opposition» d'al-Khwārizmī désigne la soustraction d'un membre additif des deux côtés de l'équation. Cela ne se trouve qu'une seule fois chez Abū Bakr; normalement, il l'utilise, ou pour l'addition «à droite» qui correspond à une opération de restauration «à gauche», ou (semble-t-il) pour la formation d'une équation par «opposition» de deux expressions différentes.

D'autres auteurs aussi s'écartent de la terminologie al-khwārizmīenne – voir [Saliba 1972]. Une analyse comparée des textes laisse peu de doute que le langage flou d'Abū Bakr est originaire, et que celui d'al-Khwārizmī, plus rigoureux et systématique, est une innovation préméditée. Abū Bakr a donc dû écrire, sinon avant al-Khwārizmī, au moins à une époque où celui-ci ne définissait pas encore ce qu'était l'algèbre; la même chose vaut pour le traité d'*al-jabr* qu'il utilise.

Pour retourner à la méthode de base d'Abū Bakr: si elle ne diffère pas (ou pas toujours) numériquement de la méthode d'*al-jabr*, comment alors comprendre la différence?

D'abord il faut remarquer le souci que prend le texte dans les sections d'*al-jabr* pour expliquer que l'Avoir représente l'aire, et la Chose (qui devient «Racine» une fois que l'Avoir a été introduit) le côté. Il faut donc que l'Avoir et sa Racine soient des grandeurs non-géométriques (au fait, comme discuté plus haut, un nombre d'unités d'argent et sa racine carrée). Il se pourrait donc que la méthode de base se distinguerait de l'autre par une utilisation directe des grandeurs géométriques.

Ce soupçon est confirmé par d'autres observations. D'abord il y a le mot «comprends» (*intellige* dans le texte latin), qui revient assez souvent dans le texte. Deux fois il doit être compris comme défi, comme exhortation à pénétrer une procédure intentionnellement obscure (N^{os} 50 et 74). Dans nombre de problèmes authentiquement géométriques c'est un appel à comprendre par moyen d'une figure géométrique trouvé dans le texte – on pense à l'emploi fait par Gérard dans une autre traduction d'un texte arabe reprochant aux géomètres indiens de ne pas «posséder aucune démonstration [pour une construction géométrique] sauf l'expédient *intellige ergo*» – là exactement ou l'on est habitué à trouver dans les textes indiens la phrase *nyāsa*, «l'on dessine» (etc.) et une figure qui élucide une instruction, un règle ou une identité algébrique[15]. Finalement, le mot est utilisé à plusieurs reprises comme dans N° 3, après la solution de base (mais jamais dans les sections d'*al-jabr*) d'un problème quasi-algébrique. Bien que dans ces cas-ci on ne trouve pas de figure (outre celle montrant un carré, un rectangle ou un losange), il semble naturel de présupposer qu'il faille, ici encore, comprendre à l'aide d'une figure géométrique – au N° 3, à l'aide de quelque chose comme Figure 2.

Quelques-uns des problèmes qui comportent un tel *intellige* semblent aussi montrer par le choix des phrases qu'il faut penser aux entités géométriques qui définissent le problème durant tout le parcours de la solution (ce qui, précisément, n'est pas le cas dans les résolutions par *al-jabr* – ce qui, en effet, n'est jamais le cas dans une solution vraiment algébrique d'un problème quelconque). Un exemple se trouve dans le N° 43, qui traite d'un «carré plus long d'un côté» (un rectangle) et qui est, en effet, une sorte de version rectangulaire des «quatre côtés et l'aire»:

> Si pourtant il t'aura dit: j'ai cumulé ses quatre côtés et son aire, et ce qui arriva fut 76, et un côté ajoute sur l'autre 2. Combien alors est chacun des côtés?
>
> La méthode de trouver ceci sera que tu multiplies la croissance d'un côté sur l'autre, toujours [c.-a.-d., quelle que soit la valeur de la croissance] par 2, et ce qui arrive sera 4. Ceci par conséquent déduis de 76 et 72 resteront, ensuite cumule le nombre des côtés du carré qui est 4 et joins-le à la croissance d'un côté sur l'autre, et ce qui arrive sera 6. Prends alors la moitié de ceci, qui est

---

[15] Le fragment gérardien fut publié par Marshall Clagett [1984:599]; un exposé bref de la pratique indienne se trouve dans [Høyrup 1992:93 note 22].

3, et multiplie-le par lui-même, et 9 arrive. Joins-le à 72, et 81 arrive. Prends donc sa racine, qui est 9, et déduis d'elle la moitié de 6, qui est trois, et le côté plus court reste qui est 6. Ajoute donc à elle 2, et le côté plus long sera 8.

Mais la méthode pour trouver ceci selon *al-jabr* est que ...

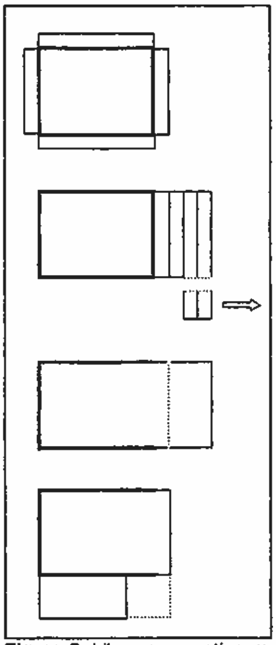

Figure 5. *Liber mensurationum*, l'interprétation géométrique de N° 43.

Les étapes numériques peuvent s'expliquer de plusieurs façons. En algèbre, on pourrait mettre x pour la largeur, et donc x+2 pour la longueur. Ceci nous conduit au procédé d'*al-jabr* d'Abū Bakr. Alternativement, désignant les deux côtés x et y ($y = x+2$), on voit que la somme de l'aire et des côtés sera $x \cdot y+2x+2y = x \cdot y+4x+2 \cdot 2 = x \cdot (y+4)+4$. Si $Y = y+4$, nous aurons donc $x \cdot Y = 76-4 = 72$ (les 4 étant 2 *la croissance* multiplié *toujours par* 2), $Y = x+(2+4) = x+6$ (4 étant le nombre des côtés). En conséquence, le problème est réduit à trouver les côtés d'un rectangle dont l'aire et l'excédent d'un côté sur l'autre sont connus. Cette dernière interprétation rend compte non seulement des calculs numériques mais aussi de la plupart des phrases explicatives du texte – et même du fait que le nombre des côtés (lui-même le résultat d'un «cumul») est *joint* à la croissance, puisque ce qui en provient reste la croissance du longueur par rapport à la largeur (comme les textes paléo-babyloniens, Abū Bakr discrimine entre différentes sortes d'additions, bien que plutôt sur le niveau des connotations).

Nos x et y, pourtant, sont des anachronismes, et une réinterprétation s'impose. Elle est fournie par la Figure 5. D'abord, on s'imagine les côtés muni d'une largeur 1 (le «forjet» des textes paléo-babyloniens). Les deux longueurs sont raccourcies, ce qui donne 4 («toujours 2» fois l'excédent 2) à éliminer de la configuration, tandis que les 4 côtés (maintenant égaux) sont cumulés au bout du rectangle, dont la longueur excédera alors la largeur de 2+4 = 6. A partir de là, tout suit la procédure de la Figure 2: formation d'un gnomon, complètement quadratique, etc.

D'une certaine façon, le N° 38 – version rectangulaire de N° 1 – est encore plus instructif, parce qu'il contient une erreur de raisonnement qui s'explique facilement dans une figure (voir Figure 6):

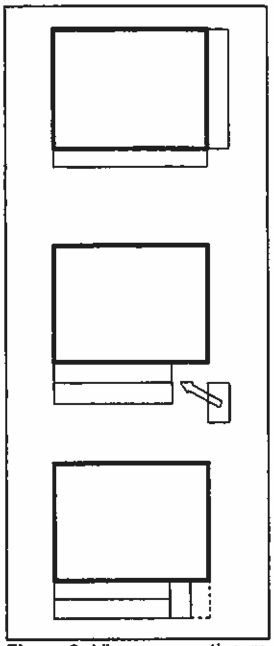

Figure 6. *Liber mensurationum*, l'interprétation géométrique de N° 38.

> Si pourtant il t'aura dit: J'ai cumulé le côté plus long et le plus court et l'aire, et ce qui arriva fut 62, d'ailleurs le côté plus long ajoute 2 sur le côté plus court. Combien donc est chaque côté?
>
> La méthode pour trouver cela sera que tu déduis 2 de 62, et 60 restera, ajoute donc 2 à la moitié du nombre des côtés, et 4 arrive. Ajoute par conséquent ceci à 60, et 64 arrive. Alors prends la racine de cela, qui est 8. Ceci, au fait, est le côté plus long. Et si tu veux le plus court, déduis 2 des 8, et 6 restera qui est le côté plus court.

Algébraïquement, il y a deux erreurs: le 4 à ajouter est $(\{[y-x]+\frac{4}{2}\}/2)^2$, où le 4 intérieur est le nombre total de côtés, et non pas $[y-x]+\frac{4}{2}$; et le nombre 8 représente $x+\{[y-x]+\frac{4}{2}\}/2$, et non pas y. Mais les méprises deviennent compréhensibles quand on regarde la Figure 6: si 2 sont coupés de la longueur, et la largeur est mise à côté, le gnomon est déjà là, et l'on voit qu'il peut être complété par la pièce coupée avec une autre, égale celle-là au nombre des côtés présents (la moitié du nombre total des côtés). En plus, le côté du carré complété est visiblement égal à la longueur du rectangle.

L'on peut toujours arriver à un résultat exact par plusieurs chemins, et à une même chaîne de calculs numériques sur la base de raisonnements différents. Que le N° 43 soit basé sur des considérations géométriques est donc une conclusion qui repose au premier chef sur le choix des phrases explicatives. Les court-circuits mathématiques du N° 38, par contre, sont difficilement explicables dans une représentation où l'on ne *voit* pas que l'excédent égale la largeur des deux côtés mis ensemble, et que le rectangle originaire lui-même fait partie du gnomon[16].

[16] Il y a des indications que les paralogismes soient voulues (comme l'est l'opacité de N° 50), et donc un défi, une survivance de la fonction éristique de «l'algèbre

Une autre trace d'un fond sous-jacent géométrique (ou du moins non-numérique, concret) est la phrase si souvent répétée «ce qui arrive/restera sera» (*quod proveniet/remanebit erit / provenit fuit*). Une analyse de son emploi dans les sections d'*al-jabr* dément l'hypothèse qu'il s'agisse d'un tic stylistique. Là – où nous avons l'avantage de savoir ce qui se passe –, il est toujours employé quand ce qui arrive (par exemple, au N° 3, le nombre 10) est identifié comme *quelque chose d'autre* (à voir, le côté). En conséquent, «ce qui arriva» par le cumul des côtés et de l'aire au N° 43, et qui fut 76, doit être d'abord quelque chose en soi, comme la configuration de la Figure 5, et s'identifier seulement en seconde instance avec le nombre 76. De même, le curieux «cela qui est 8» (N° 6, fin de la section d'*al-jabr*) doit se comprendre comme identification avec «cette entité concrète [le côté du carré complété] qui était calculée comme 8».

Parmi les caractéristiques de cette géométrie quasi-algébrique il faut souligner deux choses. D'abord, les problèmes traitent toujours des entités appartenant «par nature» aux configurations: le côté / les côtés, etc. On ne trouve jamais des coefficients artificiels – ni 2 fois l'aire, ni $^1/_3$ du côté. Ensuite, les manipulations géométriques sont faites sur les entités mêmes qui entrent dans la définition des problèmes – «une longueur» n'est jamais employée comme représentante de quelque chose d'autre – soit une aire, soit un nombre, soit un prix. La méthode est analytique, mais l'autre marque de la pensée algébrique – la représentation – est absente.

A ces égards, «l'algèbre d'arpenteur» est nettement distincte de l'algèbre paléo-babylonienne[17], notre problème initial (BM 13901 N° 23) mis à part. Mais d'autres caractéristiques sont communes. D'abord, bien sûr, la

d'arpenteur» (voir plus bas): Les 2 à déduire de 62 ne sont pas identifiés comme excédent, ni les 2 à ajouter à la moitié du nombre des côtés. Dans les solutions correctes, de telles omissions ne se retrouvent pas (voir, par exemple, les passages analogues au N° 43).

De même, la phrase démagogique qui introduit la seconde illogisme («au fait» / *namque*) est tout à fait insolite dans le texte.

[17] Dans BM 13901 N° 12, par exemple ($Q_1+Q_2 = 21'40''$, $\sqsubset\!\sqsupset(s_1,s_2) = 10'$), les aires des deux carrés sont traitées comme longueur et largeur d'un rectangle, dont l'aire est trouvée comme $\square(\sqsubset\!\sqsupset(s_1,s_2))$.

technique «naïve» géométrique de découpage et de rassemblement; en plus, la choix spécifique de méthode quand choix il y a (par exemple, le recours à la demi-somme et la demi-différence, ou le «changement de variable» du N° 43 d'Abū Bakr); une alternance très précise entre la première, la deuxième et la troisième personne grammaticale et entre le présent et le passé (une divergence partielle sur ce point nous occupera ci-dessous) et d'autres concordances d'ordre rhétorique. Il n'y a pas de doute raisonnable que les deux traditions soient reliées. Avant d'analyser la nature précise de cette liaison nous allons pourtant examiner deux sources supplémentaires, médiévales elles aussi mais plus tardives.

IV. D'autres témoins

La *Compilation de mesurage et de partition* d'Abraham bar Ḥiyya – datant de la première partie du 12ème siècle, et mieux connue comme le *Liber embadorum* (*Livre des surfaces*) de Savasorda d'après l'appellation de la traduction faite par Platon de Tivoli et le titre honorifique de l'auteur – est beaucoup plus orientée vers l'arpentage authentique que le traité d'Abū Bakr[18]. Contrairement à Abū Bakr, Savasorda se réfère aussi aux *Éléments* d'Euclide, d'abord dans son premier chapitre, où il copie les définitions des livres I et VII et nombre de théorèmes, et plus tard pour démontrer ses règles. A un certain point (Chapitre 2, première partie, §7), pourtant, il déclare qu'avant de procéder avec les triangles et ces quadrangles qui présupposent la triangulation il présentera quelques questions «pour que, avec l'assistance divine, tu puisses te montrer un calculateur fin et alerte en les résolvant». D'abord viennent quelques problèmes sur les carrés:

§8. $s = 10$: d?
§9. $d = \sqrt{200}$: s?
§10. $Q-{}_4s = 21$: Q? s?
§11. $Q+{}_4s = 77$: Q? s?
§12. ${}_4s-Q = 3$: s_u? (avec la solution double).

Il n'y a aucun doute que Savasorda ait emprunté ce bouquet, ni que sa source appartienne à la même famille que le *Liber mensurationum*. Il semble sur, pourtant, qu'il n'a pas utilisé directement le manuel d'Abū Bakr. On

[18] J'ai utilisée la traduction latine dans l'édition de Maximilian Curtze [1902:1–183].

remarque d'ailleurs que le côté de 7 des §§10–11 pourrait être relié à cette approximation grossière de la diagonale du carré 10×10 que suggéraient les N[os] 16 et 18 d'Abū Bakr.

Bien que la méthode basale d'Abū Bakr semblait être géométrique, son texte (ou du moins la traduction de Gérard, et donc le manuscrit partiellement corrompu que celui-ci a dû utiliser) ne contenait pas les figures auxquelles semblait renvoyer le «comprends» répété. Savasorda, de son côté, donne des preuves géométriques (mais ne fait jamais mention d'*al-jabr*). Formellement, pourtant, ses démonstrations se font par le moyen des théorèmes euclidiens cités au premier chapitre. Il est donc possible qu'ils aient été greffés sur la collection des problèmes traditionnels, ou par Savasorda lui-même, ou par quelque prédécesseur connaissant Euclide ou le traité de Thābit ibn Qurra sur la *Rectification des problèmes d'al-jabr par moyen de démonstrations géométriques* [éd., trad. Luckey 1941]; dans cet ouvrage, en effet, l'exactitude des algorithmes employés par les «gens d'*al-jabr*» est démontré par le moyen d'*Éléments* II.5–6, d'une manière qui diffère peu des démonstrations de Savasorda. Pourtant, il se peut aussi que Savasorda ou son prédécesseur ait simplement refaçonné les procédures «naïves» traditionnelles (et encore connues au moins d'al-Khwārizmī) en style euclidien – ceci n'offrirait pas de grande difficulté, comme le montre une comparaison entre la Figure 2 et la démonstration d'*Éléments* II.6 (voir aussi ci-dessous). Il est donc possible mais pas sûr que les démonstrations géométriques de Savasorda descendent en ligne assez directe des procédures qui, par tradition, étaient liées aux problèmes de «l'algèbre d'arpenteur».

Le *Pratica geometrie* [éd. Boncompagni 1862:1–224] de Léonard de Pise date de 1220, et exploite un grand nombre de sources. Comme l'a noté Curtze dans ses notes à Savasorda, le *Liber embadorum* appartient à leur nombre; ceci est démontré clairement aussi bien par la structure totale de l'ouvrage que par l'emprunt de phrases distinctives. Néanmoins, une grande partie des caractéristiques que Curtze croyait empruntées dérivent par contre de sources communes.

Ceci vaut en particulier pour les problèmes qui nous intéressent ici. Comme l'observait Curtze, les §§8–12 de Savasorda se retrouvent dans la *Pratica*. Leur ordre est dissemblable, pourtant, comme le sont certains paramètres numériques ($^{+n}$ compte les lignes d'en haut de la page, $^{-n}$ d'en bas):

p. 58^{+6}	$s = 10$: d?
p. 58^{-3}	$d = \sqrt{200}$: s?
p. 59^{+5}	$Q+_4s = 140$: Q? s?
p. 59^{-15}	$Q-_4s = 77$: Q? s?
p. 60^{+10}	$_4s-Q = 3$: s_u? (avec la solution double).

Les termes du texte, en plus, sont toutes différentes, même si Léonard emploie sans gêne les mots d'une source qu'il exploite (voir un exemple ci-dessous). Finalement, sur plusieurs points où Léonard s'écarte de Savasorda, il suit simplement la tradition comme nous l'avons rencontrée chez Abū Bakr. Comme le fait celui-ci (dans la traduction gérardienne), Léonard parle des *quatuor eius latera* là où Savasorda soustrait *omnium suorum laterum in unam summan collectum* – et comme c'est le cas dans le *Liber mensurationum*, $Q+_4s = 140$ possède la solution $s = 10$[19].

Il n'y a aucun doute que Léonard avait accès à la traduction gérardienne d'Abū Bakr. Il suffit de comparer le N° 38 de ce dernier (voir ci-dessus) avec le problème correspondant de Léonard (p. 66^{-13ff}). Les mots de l'énoncé sont différents, mais, à partir du point où commence la solution, Léonard imite le texte gérardien avec la seule variation que les nombres sont considérés comme des pluriels grammaticales, ce qui a des conséquences pour les formes verbales (*provenient* au lieu de *proveniet*, etc.) et les pronoms. A la fin, Léonard ajoute le commencement d'une solution algébrique:

> Pose le plus petit côté comme une Chose, en conséquence le plus grand côté sera une Chose et 2 dragmes. De la multiplication de ce côté plus court par le plus long arrive la surface. Pour cette raison, multiplie la Chose, ce qui veut dire le côté plus petit, par une chose et deux dragmes, et tu auras un Avoir et deux Racines pour la surface. Si s'y ajoutent les deux côtés, ce qui veut dire 2 Racines et 2 dragmes, il y aura un Avoir et 4 Racines et 2 dragmes, qui seront égalés à 62 dragmes. Enlève alors des deux parties 2 dragmes, et un Avoir et

19 Le problème $Q-_4s = 77$, en outre, semble dériver par «cascade inverse» (voir note 13) du problème $Q+_4s = 77$ trouvé chez Savasorda. Puisqu'il n'y a aucune indication que Léonard ait pensé à cette liaison de cascade entre équations, il semble qu'il ait exploité ici une source qui n'est ni Savasorda ni Abū Bakr/Gérard.

4 Racines resteront, qui seront égalés à 60, etc.

Évidemment, Léonard a vu que quelque chose ne marche pas dans la solution donnée par Abū Bakr. Ne voulant rien changer dans le texte hérité, il y ajoute une autre mé[illegible]e – mais il s'interrompt juste au point où le prochain pas démontrerait le premier des illogismes, probablement parce qu'il voit l'embarras mais ne sait pas comment le surmonter, ne devinant pas le procédé géométrique qui le produit.

En d'autres points, Léonard donne des preuves géométriques, par exemple quand il résout «les quatre côtés et l'aire» (p. 59[-5ff]):

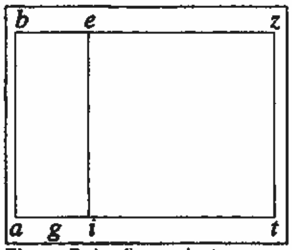

Figure 7. La figure dont accompagne Léonard son traitement des «quatre côtés et l'aire».

Et si la surface et ses quatre côtés font 140: et tu veux séparer les côtés de la surface. Soit un carré *ezit*, et qu'y soit ajouté une étendue rectangulaire *ae*. E qu'*ai* prolonge la droite *it* et *be* la droite *ez*. Et que chacun des droites *be* et *ai* soit 4, à cause du nombre des côtés du carré. Pour cette raison, l'étendue *ae* sera égalée aux quatre côtés du quadrilatère *et*, puisque l'un de ces côtés *ei* est l'un des côtés de l'étendue *ae*. En effet, l'étendue *et* contient la surface du carré *zi*, mais [non] ses quatre côtés. Alors l'étendue *za* est 140. Et ceci est ce que nous avons dit, à dire l'Avoir avec 4 Racines seront égalés à 140; et l'Avoir est le carré *et*, et ses 4 Racines sont l'étendue *ae*. En effet, la droite *ai* est divisée en deux parties égales sur le point *g*. Et puisque la ligne *ti* est ajoutée à la ligne *ai*, l'étendue rectangulaire contenue par *it* et *at*, avec le carré sur la ligne *gi*, égale le carré sur la ligne *gt*. Mais l'étendue contenue par *it* et *at* est comme l'étendue contenue par *zt* et *at*, puisque *it* est égal à *tz*. Alors l'étendue contenue par *zt* et *at* avec le carré sur la ligne *gi* est égalée au carré sur la ligne *gt*. Mais [l'étendue contenue par] *zt* et *at* est l'étendue *za*, qui est 140. Ce qui, quand le carré sur la ligne *gi*, c'est-à-dire 4, y est ajouté, donne 144 pour le carré sur la ligne *gt*. Pour cette raison, *gt* est 12, c'est-à-dire la racine de 144. Pour cette raison, si de *gt gi* est retranché, c'est-à-dire 2, restera *it* [égal à] 10, ce qui est le côté du carré *et*. Si l'on ajoute à la surface de celui-ci, c'est-à-dire à 100, ses quatre côtés, qui sont 40, on aura 140, comme il se doit. Et on agit comme ceci dans tous les problèmes où un nombre est égalé à un carré et des Racines ensemble, à dire, au nombre on ajoute le carré de la moitié des Racines, et la racine de la somme est trouvée; de celle-là on enlève la moitié des dites Racines, et la Racine de l'Avoir demandé restera; qui, si on le multiplie par lui-même, produit l'Avoir. Par exemple: 133 dragmes sont égalés à un Avoir et 12 Racines. Pour cette raison, si nous ajoutons le carré de la moitié des Racines, c'est-à-dire 36, à 133, cela fera 169. Quand on a éliminé 6, c'est-à-dire la moitié des Racines, de sa racine, c'est-à-dire de 13, 7 restent comme Racine de l'Avoir demandé; et l'Avoir sera 49.

La démonstration géométrique est similaire à celle de Savasorda (et de Thābit), et permet donc les mêmes conclusions. Le fait que Léonard n'a pas su réparer le N° 38 d'Abū Bakr suggère, en outre, que Léonard au moins n'ait plus eu aucun accès direct à la vieille tradition «naïve» mais seulement à la version passée par le filtre euclidien. Il est aussi caractéristique que Léonard donne seulement une solution algébrique pour «les quatre côtés et l'aire rectangulaire» – là où les procédures «naïves» étaient particulièrement visibles dans les phrases explicatives d'Abū Bakr (son N° 43).

Que Léonard ne connaisse que la version filtrée irait de soi s'il n'avait eu d'autres sources qu'Abū Bakr/Gérard et Savasorda. Mais comme nous l'avons déjà vu, ces deux ouvrages ne doivent pas épuiser la liste. Ceci est encore suggéré par le substitut léonardien du N° 14 d'Abū Bakr, qui était ou corrompu, ou intentionnellement opaque (voir note 12). Il est très peu probable que ce substitut soit fabriqué par Léonard – d'une part, parce que celui-ci était trop systématique pour introduire un problème mixte au milieu d'un groupe de problèmes $_4s = \alpha Q$, d'autre part, parce que dans le substitut les côtés précèdent l'aire (comme dans la tradition), tandis qu'ailleurs Léonard à normalisé l'ordre des membres.

Somme toute, Savasorda, Gérard et Léonard ont donc connu au moins trois descendants différents de la tradition quasi-algébrique porteuse du problème des «quatre côtés et l'aire» (comme nous allons voir, Luca Pacioli semble avoir eu encore un contact). Tous ces descendants paraissent pourtant avoir perdu la connaissance directe des méthodes «naïves» séculaires, les filtrant ou les remplaçant par des renvois aux *Éléments* là où cela était possible, et transmettant les solutions dont une telle euclidisation n'était pas possible (comme les N^{os} 38 et 43 d'Abū Bakr) en forme purement algorithmique[20].

---

[20] Il n'est pourtant pas tout à fait exclu que Léonard ait emprunté des procédés géométriques traditionnels pour la solution de certains problèmes complexes

La transformation de la tradition durant les siècles qui séparent al-Khwārizmī de Savasorda et Léonard, ainsi que son assimilation à la tradition d'*al-jabr* – de son côté de plus en plus géométrisée – est encore démontrée par d'autres aspects du texte léonardien. Pour Abū Bakr, nous nous en souvenons, la méthode de base et la méthode d'*al-jabr* étaient clairement distinctes, et il prenait grand soin d'expliquer que l'Avoir représentait l'aire du carré (etc.). Savasorda ne parlait pas du tout d'algèbre, mais puisqu'il écrit pour un public qui ne connaissait pas cet art (les communautés juives de Provence), cela ne prouve rien. Léonard, pourtant, abolit toute démarcation; ceci est déjà manifeste dans la dernière citation, mais encore plus évident dans l'introduction du chapitre sur les quadrilatères (pp. 56f). Tandis qu'al-Khwārizmī [éd. Hughes 1986:233] avait expliqué que la catégorie du nombre tombe en trois espèces, les Racines, les Avoirs, et les nombres simples sans renvoi aux espèces précédentes, Léonard nous informe que les trois natures des nombres et de leurs fractions sont Racines des carrés; carrés; et nombres simples. Il n'y a aucun doute que le passage est inspiré d'al-Khwārizmī (des phrases caractéristiques sont empruntées de la traduction de Gérard); ni de doute, pourtant, que Léonard ne fait aucune distinction entre les grandeurs géométriques et les nombres utilisés en algèbre.

Les textes de Savasorda et Léonard démontrent donc, d'un côté, que la tradition qui avait transmis «les quatre côtés et l'aire» depuis l'âge de bronze était encore présente à leur époque; mais de l'autre, qu'elle avait été réduite en simulacre ou fantôme. Après avoir servi al-Khwārizmī dans sa transformation de l'art d'*al-jabr* en discipline mathématique en lui procurant ses démonstrations, et après des siècles de coexistence avec une géométrie pratique toujours plus euclidisée, elle avait perdu sa raison-d'être comme technique mathématique distincte, et ne survivait que comme une collection de problèmes vénérés et «brillants».

---

impliquant la diagonale d'un rectangle (par exemple, $l_1+l_2+d = 24$, $A = 48$, [éd. Boncompagni 1862:68]). Mais il a aussi pu les dériver lui-même de la procédure numérique.

V. Une reconstruction historique

Nous retournerons au destin ultérieur du fantôme, mais d'abord nous allons examiner ce qu'on peut apprendre sur la préhistoire de l'algèbre en suivant le problème des «quatre côtés et l'aire» et sa famille, du berceau jusqu'au moyen âge.

Une première question regarde précisément le berceau. Notre première rencontre avec le problème était dans une tablette paléo-babylonienne, la deuxième dans un manuel arabe de mesurage, avec une résurgence dans l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī. Est-il probable qu'un problème créé à l'intérieur de l'école des scribes mais imitant la forme d'un vrai problème d'arpentage aurait été embrassé par les arpenteurs et transmis par eux, avec une gamme restreinte de problèmes similaires en forme d'une «algèbre d'arpenteur», tandis que le tronc principal de l'algèbre d'école restât propriété exclusive de l'école des scribes et périt avec elle? Ou serait-ce que les emprunteurs fussent les savants d'école?

La question est une variante d'une question centrale des études folkloriques: Les contes populaires sont-ils *gesunkenes Kulturgut* comme souvent revendiqué au 19ème siècle, les décombres de mythologies décomposées ou des reflets de la haute littérature – ou les mythes empruntent-ils (parfois) leurs motifs aux contes populaires? En ultime conséquence: la culture vraie est-elle produite par les prophètes, les prêtres et les savants, et la culture «basse» des autres est-elle donc toujours dérivée, plus ou moins mal comprise et défective?

Plusieurs arguments s'opposent à l'idée d'une origine scolaire, et favorisent donc une origine parmi les géomètres-praticiens.

D'abord il y a la solution du problème. Chez Abū Bakr et Léonard, le côté est 10. Dans la version paléo-babylonienne, elle l'est aussi – mais *10 minutes*. 10, évidemment, est un choix «naturel» dans une culture utilisant une numération décimale. 10´ ne l'est pas, ni *a priori* ni selon les tablettes babyloniennes. Pour les mathématiciens-scribes, en effet, 10 dans n'importe quel ordre de grandeur (y compris 10°) serait une longueur tout à fait inusitée. Il est hautement improbable que le problème ait été créé à partir de cette solution «contre nature», et alors adopté par des praticiens qui, par hasard, auraient pu corriger les 10´ (qu'ils aurait conçu comme $\frac{1}{6}$) et obtenir la valeur «naturelle» 10. Les mathématiciens-scribes, par contre, s'ils avaient emprunté un problème basé sur la valeur 10, auraient facilement eu l'idée de le mettre dans l'ordre favori des textes «algébriques» – c'est-à-dire dans l'ordre des minutes (qui est aussi l'ordre préféré dans la tablette où se trouve notre problème).

Il y a aussi le thème et le caractère général du problème. Comme déjà dit, la collision incongrue du sens concret (*les* quatre côtés) et du non-sens (quel praticien connut jamais la somme des côtés et de l'aire sans les connaître séparément?) doit nous faire penser à une énigme plutôt qu'à un problème mathématique ordinaire. D'habitude, de telles énigmes mathématiques sont classifiées comme des «récréations mathématiques». A l'époque pré-moderne, elles furent transmises par les entourages des praticiens mathématiques, et à leur usage, comme le dit Savasorda, «pour que, avec l'assistance divine, tu puisses te montrer un calculateur fin et alerte en les résolvant». Ou, comme le dit un problème pris d'une collection carolingienne (je cite le texte complet[21]):

> Un paterfamilias avait d'une maison à l'autre une distance de 30 lieux, et un chameau qui devait porter d'une maison à l'autre 90 mesures de grain en trois tours. Pour chaque lieu le chameau mangeait 1 mesure. *Que celui qui vaille quelque chose dise*, combien de mesures sont restées?

En d'autres mots: ces problèmes qui, selon leur forme, appartiennent au domaine des praticiens (domaine des arpenteurs, ou domaine des marchands de caravane, selon le cas), mais qui sont plus complexes ou plus bizarres que les problèmes rencontrés dans la pratique de tous les jours, servent á entraîner l'agilité mentale et à caresser la fierté professionnelle des membres du métier[22] – d'où le terme «brillant» dont se sert al-Khwārizmī pour caractériser la partie inutile d'*al-jabr*. Sans exception, ils comportent quelque chose de frappant: à moins qu'on ait recours à un artifice malin (un double arrêt intermédiaire après 20 lieux suivi chacun

[21] *Propositiones ad acuendos iuvenes*, problème 52, version II [éd. Folkerts 1978:74]. Italiques JH.

[22] Ce lien entre les «récréations mathématiques» et les métiers pratiques est un thème primordial de [Høyrup 1990a]. C'est cette fonction sociale et non vraiment pratique qui me fait parler d'algèbre «d'arpenteur» et non «d'arpentage»; en effet, elle ne sert à rien dans l'arpentage.

d'un retour), le chameau mangera exactement *tout* le grain. Dans un autre problème répandu, 100 unités monétaires achèteront *exactement* 100 animaux. Les dédoublements répétés vont jusqu'à 30 ou 64, parce que cela s'accorde avec les jours du mois ou le nombre des cases d'un damier de jeu[23].

Le thème – les côtés vrais d'un champ apparemment réel; le renvoi précisément à *tous* les côtés; la solution au moyen d'un stratagème doublement rusé (quadripartition et complétion quadratique): tout indique que le problème des «quatre côtés et l'aire» fut conçu dans un entourage non-scolaire de géomètres-praticiens, et non pas dans l'école des scribes.

Une troisième observation nous permet de localiser hypothétiquement cet entourage dans le temps et l'espace. La fin du chapitre III affirmait qu'il y a un haut degré de concordance d'ordre rhétorique entre le texte d'Abū Bakr et le corpus paléo-babylonien, tout en promettant de retourner à une divergence partielle. Celle-ci regarde le «quelqu'un» qui énonce les problèmes du *Liber mensurationum* (au parfait, première personne singulier). Les textes normaux paléo-babyloniens, pour leur part, commencent directement avec l'énoncé, ce qui suggère que c'est le maître qui parle. Un seul groupe de textes, pourtant, commence comme Abū Bakr, «Si quelqu'un t'a interrogé: ...». Ces textes, publiés par Baqir [1951; 1962] et datés au commencement du 18ème siècle, viennent de Tell Ḥarmal et Tell Dhiba'i, deux localités du royaume d'Ešnunna. Ešnunna fut un foyer pour la création d'une culture littéraire akkadienne, et peut-être le premier foyer. Déjà au 19ème siècle, Ešnunna produit le premier code légal écrit en akkadien (les précédents étaient tous en Sumérien), au moins un demi-siècle en avance sur Hammurapi. Puisque «l'algèbre» est un genre akkadien, apparemment sans antécédent Sumérien, Ešnunna pourrait donc bien être

[23] Il y a deux raisons pour cela. D'abord, la qualité d'une énigme est toujours augmentée si elle est frappante. De plus, si les paramètres d'un problème ne sont pas marquants, il y a de bonnes chances qu'ils changeront durant la transmission orale ou semi-orale. Une fois que quelqu'un a choisi une valeur remarquable, elle est susceptible d'être mémorisée et transmise – non seulement parce qu'elle est mémorable en soi mais aussi parce qu'elle augmente la valeur de l'énigme.

Les énigmes mathématiques, si par hasard non pas nées frappantes, sont susceptibles de le devenir par une sorte de loi d'attraction – ou d'être oubliées.

le lieu où les récréations mathématiques des géomètres-praticiens ont été empruntées par les scribes savants et introduites dans le curriculum de l'école.

Une origine akkadienne va bien avec le côté de notre champ. L'akkadien, en effet, est une langue sémitique comme est l'arabe, et comme l'est la langue intermédiaire probable, l'araméen. Tous les trois utilisent donc le même système de numération décimale. Elle convient aussi au nom donné (dans un texte datant de la fin de l'époque paléo-babylonienne) à la complétion quadratique; elle cadre avec l'observation que les scribes paléo-akkadiens du 22ème siècle ont déjà dû faire usage de l'identité «algébraico-géométrique» $\square(R-r) = \square(R)-2\sqsubset\!\sqsupset(R,r)+\square(r)$; et elle s'accorde avec la présence d'une tablette avec une bissection d'un losange (un autre problème transmis par notre tradition) dans un temple paléo-akkadien[24]. Il apparaît que déjà l'école paléo-akkadienne avait adopté le savoir récréationnel des arpenteurs akkadiens, mais que l'école strictement utilitaire de l'époque néo-Sumérienne (21ème siècle) ne la transmit pas. Puisqu'il n'y a aucune trace «d'algèbre» de deuxième degré dans les textes paléo-akkadiens, il semble aussi que le stratagème de la complétion quadratique (la «méthode akkadienne») n'ait été découverte qu'entre 2100 et 1800 avant J.-C.

Puisqu'il y a une parenté indéniable entre la tradition d'«algèbre d'arpenteur» et «l'algèbre» de l'école des scribes en général, et puisque la première ne dérive pas de la dernière, il semble que la dernière discipline doive son origine – et non seulement une poignée de problèmes spéciaux – à une inspiration empruntée aux arpenteurs (peut-être à l'occasion d'un effort de scolariser le métier de pratique mathématique) qui depuis, sous l'influence du milieu scolaire et de cette prédilection pour l'ordre systématique qui caractérisait l'école babylonienne encore plus que les autres écoles, s'est développée et transformée de fond en comble. De cette façon la complétion quadratique, une fois rien qu'une ruse inattendue comparable à l'arrêt du chameau, devenait la pierre d'assise de l'édifice si prodigieux de l'«algèbre» babylonienne. Toute idée que la diagonale d'un carré 10×10 serait 14 aura été éliminée par les calculateurs accomplis de l'école.

---

[24] Voir [Høyrup 1990:326]; [Whiting 1984:65f]; et [Friberg 1990:541].

Si l'on fait la liste des problèmes qui se trouvent, et dans le corpus paléo-babylonien et chez Abū Bakr (ou dans des sources post-babyloniennes comparables), on aura du même coup un inventaire des énigmes qu'ont dû connaître les arpenteurs au commencement du deuxième millénaire[25]. Pour les carrés, $s+Q = \alpha$ et ${}_4s+Q = \beta$ ($\alpha = 110$, $\beta = 140$); vraisemblablement aussi $Q-s = \gamma$, $Q-{}_4s = \delta$ et ${}_4s-Q = \varepsilon$, ainsi que des questions sur la diagonale quand le côté est connu (qui pourtant n'ont pas pu survivre à la transplantation au milieu scolaire). Pour les rectangles, $A = \alpha$, $l_1 \pm l_2 = \beta$; $A+(l_1 \pm l_2) = \alpha$, $l_1 \mp l_2 = \beta$ (et probablement les mêmes problèmes concernant $2l_1$ et $2l_2$, c'est-à-dire *tous les côtés*); et $A = \alpha$, $d = \beta$. Ce dernier problème est d'un intérêt particulier. Il se trouve dans une des tablettes d'Ešnunna, celle de Tell Dhiba'i [éd. Baqir 1962], où il est résolu exactement comme dans le §18 de Savasorda (voir Figure 8): le carré de la diagonale donne l'aire *FHJL;* après la soustraction du double de l'aire reste le carré sur la différence des côtés; ainsi, l'extraction de sa racine carrée (Babylonien: de ce qui «fait qu'il soit équilatéral») livre la différence des côtés. Nous avons donc un problème bien connu, un rectangle dont l'aire et la différence des côtés sont connues, et il est résolu comme dans la Figure 2.

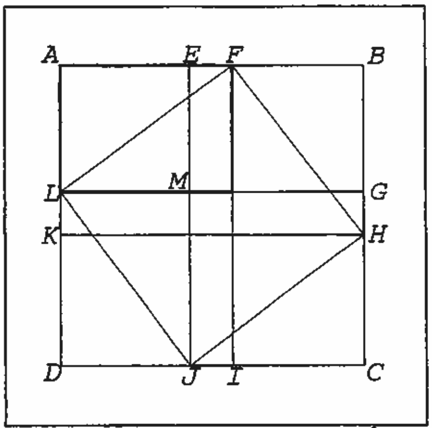

Figure 8. La démonstration «naïve» que $d^2 \pm 2A = (l_1 \pm l_2)^2$ dans un rectangle.

Abū Bakr, comme plus tard Léonard, choisit la route complémentaire, réduisant la question à un autre problème familier: par addition du double de l'aire au carré sur la diagonale, la somme des côtés est trouvée, etc.

Finalement il y a quatre problèmes traitant de deux carrés, dont le plus petit est conçu comme encastré concentriquement dans l'autre: $Q_1+Q_2 =$

25 Il n'est pas tout à fait à exclure que quelques-uns des problèmes aient fait la route inverse et aient été transmis par la tradition des arpenteurs après avoir été inventés dans l'école; néanmoins, l'homogénéité du groupe parle contre cette hypothèse.

α, $s_1 \pm s_2 = \beta$; et $Q_1 - Q_2 = \alpha$, $s_1 \pm s_2 = \beta$[26].

A partir de ce commencement assez modeste, l'école des scribes crea une discipline complexe, qui pourtant disparut avec l'institution scolaire elle-même à la fin de l'époque paléo-babylonienne, c'est-à-dire après 1600 avant J.-C. C'est seulement durant l'époque tardive, en particulier à l'ère séleucide (après 300 avant J.-C.), qu'un certain intérêt «algébrique» fait surface de nouveau.

Il n'y a pas de doute qu'une certaine continuité relie la pensée mathématique de cette époque tardive à celle de l'école paléo-babylonienne. Quelques particularités de la terminologie montrent pourtant que la profession des scribes n'a pas été (ou du moins pas seule) responsable de cette transmission en ce qui concerne l'algèbre, et qu'une nouvelle adoption de matériaux de la tradition des arpenteurs s'était produite entre-temps.

Entre-temps aussi, cette tradition elle-même avait innové (peut-être emprunté, mais d'où n'est pas clair du tout). La seule tablette séleucide qui comporte toute une gamme de problèmes de deuxième degré (BM 34568, [éd. MKT III, 14–17]) a l'air d'une présentation systématique de nouvelles méthodes et de nouveaux problèmes. Tous les problèmes, sauf deux, traitent de rectangles, nous donnant les combinaisons suivantes des côtés, l'aire et la diagonale: l_1 et l_2; l_1 et d; l_1+d et l_2; l_1+l_2 et A; l_1+l_2 et d; l_1+d et l_2; l_1+d et l_2+d; l_1+l_2+d et A (puisqu'on cherche tantôt l'aire, tantôt la diagonale, etc., cela donne 17 problèmes au total). Les deux premières combinaisons sont trop simples pour se trouver telles quelles dans les tablettes paléo-babyloniennes; la quatrième, un des problèmes-standard auxquels les autres étaient réduits, donne lieu à un nouveau procédé[27]. Le reste est tout à fait nouveau. Avec une seule exception, tous les problèmes se retrouvent dans le *Liber mensurationum*. En plus, l'exception (l_1+d et l_2+d donnés) n'en est vraiment pas une, puisqu'Abū Bakr réduit son N° 36 (l_1+d et l_1-l_2 donnés) au problème séleucide et le résout de la

---

[26] Il n'est généralement pas connu que les problèmes $Q_1-Q_2 = \alpha$, $s_1 \pm s_2 = \beta$ ont été traité par les Babyloniens; mais voir Texte V, col. III (non traduit) dans [Bruins & Rutten 1961:46].

[27] $[l_1-l_2]^2 = [l_1+l_2]^2-4A$, $l_2 = 30' \cdot \{[l_1+l_2]-[l_1-l_2]\}$, là où les textes paléo-babyloniens utiliseraient toujours le moyen $\frac{1}{2}[l_1+l_2]$ et la déviation des deux côtés du moyen $\frac{1}{2}[l_1-l_2]$.

même manière.

Il semble significatif que le seul problème rectangulaire complexe parlant d'une diagonale attesté dans le corpus paléo-babylonien ($A = \alpha$, $d = \beta$, voir Figure 8) est absent de l'anthologie séleucide. Également significatif est l'un des deux problèmes qui ne traitent pas d'un rectangle, celui qui s'intéresse à un roseau appuyé obliquement sur un mur. Il est équivalent au problème rectangulaire $d-l_1 = \alpha$, $l_2 = \beta$ (N° 31 du *Liber mensurationum*). Rien de mathématiquement comparable se retrouve dans les vieilles tablettes. *Le roseau obliquement appuyé*, pourtant, est une vieille connaissance – mais couvrant originellement le problème bien plus simple $d = \alpha$, $l_1 = \alpha-\beta$.

Donc, si la tablette séleucide est un catalogue de nouveaux problèmes et approches, le problème du roseau a pu servir comme démonstration que ce vin jeune et pétillant pouvait être mis dans une vieille bouteille vénérée – ce qui ne pourrait qu'exalter la valeur des deux. Quoi qu'il en soit, et contrairement á l'opinion généralement acceptée, la tablette démontre (sur d'autres niveaux encore que nous ne discuterons pas ici) une transformation assez radicale de «l'algèbre» babylonienne, en dépit de la continuité apparente de certains traits.

Non moins contraire à certaines vues courantes, mais de façon opposée, est la perspective qu'ouvre l'analyse sur le livre II des *Eléments* d'Euclide. Pour faciliter la discussion, une traduction des premières 10 propositions en symboles peut être utile, bien qu'une telle traduction est toujours un peu arbitraire (voir par exemple les deux traductions de la proposition 7 données ci-dessous):

1. $\sqsubset\!\sqsupset(a,p+q+\ldots+t) = \sqsubset\!\sqsupset(a,p) + \sqsubset\!\sqsupset(a,q) +\ldots+ \sqsubset\!\sqsupset(a,t)$.
2. $\square(a) = \sqsubset\!\sqsupset(a,p) + \sqsubset\!\sqsupset(a,a-p)$.
3. $\sqsubset\!\sqsupset(a,a+p) = \square(a) + \sqsubset\!\sqsupset(a,p)$.
4. $\square(a+b) = \square(a) + \square(b) + 2\sqsubset\!\sqsupset(a,b)$.
5. $\sqsubset\!\sqsupset(a,b) + \square({}^{a-b}\!/_2) = \square({}^{a+b}\!/_2)$.
6. $\sqsubset\!\sqsupset(a,a+p) + \square({}^{p}\!/_2) = \square(a+{}^{p}\!/_2)$.
7. $\square(a+p) + \square(a) = 2\sqsubset\!\sqsupset(a+p,a) + \square(p)$; ou bien $\square(a) + \square(b) = 2\sqsubset\!\sqsupset(a,b) + \square(a-b)$.
8. $4\sqsubset\!\sqsupset(a,p) + \square(a-p) = \square(a+p)$.
9. $\square(a) + \square(b) = 2[\square({}^{a+b}\!/_2) + \square({}^{b-a}\!/_2)]$.
10. $\square(a) + \square(a+p) = 2[\square({}^{p}\!/_2) + \square(a+{}^{p}\!/_2)]$.

On voit que la proposition 6 coïncide avec proposition 5 si l'on met $b = a+p$. La proposition 5 correspond pourtant à la situation où la somme des deux côtés d'un rectangle est connue (comme c'est aussi le cas dans la proposition 9, a et b résultent d'une partition d'une ligne en segments inégaux); l'une prolonge donc l'autre dans la figure de la démonstrations; la proposition 6, par contre, est adaptée à la situation où la différence des deux côtés est donnée, et dessine donc les deux segments en superposition. La relation mutuelle entre les propositions 9 et 10 est la même, tandis que celle entre les propositions 4 et 7 est légèrement différente.

Mettant de côté pour un moment les propositions 1–3, les autres peuvent tous être vues comme des «critiques» (quasi-Kantiennes) des procédés coutumiers de «l'algèbre d'arpenteur». La proposition 4, entre autre, est utilisée par Léonard quand il trouve la somme des deux côtés d'un rectangle à partir de l'aire et la diagonale, tandis qu'Abū Bakr présuppose son contenu; la proposition 7 joue les mêmes rôles pour Savasorda et le texte de Tell Dhiba'i quand ils trouvent leur différence[28]. La proposition 6 expose la solution des problèmes $Q \pm \alpha s = \beta$, y compris «les quatre côtés et l'aire», et $A = \alpha$, $l_1 - l_2 = \beta$ (et Léonard la cite dans ces occasions). De même, la proposition 5 explique la solution des problèmes $A = \alpha$, $l_1 + l_2 = \beta$ et $\alpha s - Q = \beta$. La proposition 7, outre l'usage qu'en fait Savasorda, exprime précisément la règle apparemment présupposée dans un texte scolaire paléo-Akkadien. La proposition 8 ne regarde directement aucun des problèmes que nous avons discutés jusqu'ici; mais elle peut être liée à la configuration des «quatre côtés et l'aire» (montrant que si l'on ajoute au carré $\square(s)$ ses quatre côtés, on n'obtient pas le carré $\square(s+2)$; ce qu'il faut ajouter, ce sont les côtés du «carré moyen» $\square(s+1)$); ou elle peut être associée à la configuration d'un carré inscrit concentriquement dans un autre, déjà signalée. Les propositions 9 et 10 enfin enseignent la solution des problèmes $Q_1 + Q_2 = \alpha$, $s_1 \pm s_2 = \beta$. Ni elles, ni la proposition 8 ne sont

---

[28] Il faut peut-être souligner que l'emploi de propositions des *Éléments* par Savasorda et Léonard ne signifie pas nécessairement que ses mêmes propositions était utilisées dans la tradition de «l'algèbre d'arpenteur» dans exactement la même forme, seulement qu'ils étaient encore si proches à la tradition qu'ils pouvaient servir dans la même fonction.

jamais citées dans les *Éléments*[29].

Les démonstrations des propositions 9 et 10 sont de type évidemment «grec» et synthétique. Toutes les autres, pourtant, tombent en deux sections, dont la deuxième est en essence une procédure de découpage et de rassemblement, tandis que la première explique *pourquoi* les carrés sont vraiment des carrés, pourquoi les aires supposées égales le sont vraiment, etc. Le rôle de la première section est donc de prendre soin que la deuxième ne soit pas «naïve».

La fonction des propositions 1–3 est comparable. La proposition 1 est une «critique générale de la raison d'arpentage» qui autorise le découpage et le rassemblement des rectangles. Les propositions 2 et 3 appliquent cette connaissance à la situation où des côtés (pourvus d'un forjet, il va de soi) sont enlevés d'un carré ou y sont ajoutés.

Éléments II.1–10 est donc dans son ensemble, la conclusion est à peu près inéluctable, intimement lié à «l'algèbre de découpage et de rassemblement» des arpenteurs, et lié précisément comme critique. Lié, on constate encore, au groupe des problèmes remontant à l'époque paléo-babylonienne. Il n'y à aucune trace des «nouveaux» problèmes de la tablette séleucide.

Il y a de bonnes raisons de croire que le genre de géométrie des aires que représente *Éléments* II s'est développé au cinquième siècle au cours d'investigations théoriques inspirées par la géométrie et «l'algèbre» des arpenteurs[30]. En conséquence il faut croire aussi que les problèmes «nouveaux» de la tradition des arpenteurs ont été inventés ou sont arrivés au monde méditerranéen entre 500 avant J.-C. et 250 avant J.-C. Ont peut penser, ou aux contacts résultant des conquêtes d'Alexandre, ou aux

---

[29] A vrai dire, la proposition 9 est citée une fois, mais dans un lemme qui semble être interpolé. Comme l'explique Ian Mueller [1981:301], les propositions 8 et 10 *auraient* pu être citées de manière analogue, comme justifications de présuppositions non prouvées. Il semble pourtant que la sorte de savoir qu'elles expriment était trop familier pour être cité explicitement, une fois que son exactitude était démontrée.

[30] Argument et références bibliographiques (en particulier aux travaux de Wilbur Knorr) dans [Høyrup 1990b].

communications culturelles le long de la Route de Soie[31].

Même le petit groupe de problèmes du deuxième degré du livre I de l'*Arithmetica* de Diophante se restreint à ce qui à dû appartenir au stock originel de «l'algèbre d'arpenteur» (mais ne couvre pas tout l'essentiel, comme le fait Euclide, et le traduit naturellement en langage numérique): $A = \alpha$, $l_1 \pm l_2 = \beta$ (propositions 27 et 30); $Q_1 \pm Q_2 = \alpha$, $s_1 + s_2 = \beta$ (propositions 28 et 29).

La prochaine fois que «l'algèbre d'arpenteur» apparaissait dans les sources était à l'occasion de sa rencontre avec la tradition d'*al-jabr,* dans le manuel d'Abū Bakr et quand al-Khwārizmī y avait recours pour construire ses démonstrations géométriques. Une chose seulement reste à ajouter à la discussion précédente de ce processus à la lumière de ce qui a été dit entre-temps: quand al-Khwārizmī explique les opérations arithmétiques sur les binômes, son exemplification constant de la catégorie des racines – donc la première racine que son lecteur-modèle reconnaîtrait comme irréductible à un nombre – est $\sqrt{200}$, c'est-à-dire la diagonale du carré 10×10 (comme pour Aristote, c'est la diagonale du carré 1×1). La tradition selon laquelle le carré typique serait 10×10 – la tradition à laquelle al-Khwārizmī a emprunté ses démonstrations – doit donc avoir été très familière aux lecteurs présumés du traité.

«L'algèbre d'arpenteur» ne disparaissait pas comme tradition indépendante au moment où al-Khwārizmī avait intégré ses méthodes avec ceux d'*al-jabr;* comme nous avons vu, Savasorda, Gérard et Léonard ont pu rencontrer encore trois ou quatre versions différentes aux 12ème et 13ème siècles. Mais elle perdait sa raison-d'être comme technique mathématique spécifique. Ici, comme dans d'autres domaines, les mathématiciens arabes ont lancé l'intégration des mathématiques théoriques et des mathématiques «des praticiens», une intégration qui allait transformer ces dernières en «mathématiques appliquées» à l'avènement de l'époque moderne. Gérard,

[31] Puisque les problèmes de deuxième degré qui se trouvent dans les *Neuf Chapitres sur l'arithmétique* chinois (premier siècle de l'ère chrétienne) sont du genre de ces nouveaux problèmes, et puisqu'un d'eux est indubitablement emprunté (le roseau obliquement appuyé), les conquêtes ne peuvent à peine être tenues comme seules responsables.

en traducteur scrupuleux, rendit encore la distinction d'Abū Bakr entre méthode de base (géométrique) et d'*al-jabr* (numérique). Léonard, en mathématicien, n'y voyait pas la pointe, ou n'y voyait aucune pointe.

En même temps, Léonard nous montre une algèbre qui elle-même se géométrise. Pourquoi alors al-Khwārizmī n'a-t-il pas pu utiliser «l'algèbre d'arpenteur» telle quelle et se passer entièrement de la technique d'*al-jabr?*

D'abord, évidemment, de telles questions sur l'histoire hypothétique ont peu de sens. Peut-être al-Khwārizmī a fait l'*al-jabr* parce que c'est ce qu'a voulu le Calife – qui peut le savoir? D'autre part il est évident que «l'algèbre d'arpenteur» possédait certaines caractéristiques qui s'opposait à l'entreprise proposée, caractéristiques que nous avons déjà relevées. «L'algèbre d'arpenteur» était algébrique dans la mesure où ses solutions suivaient les mêmes étapes numériques qu'une solution moderne au moyen d'algèbre, et qu'elle était analytique. Mais deux autres caractéristiques de la pensée algébrique lui manquaient. D'abord, elle n'était pas utilisée (et donc à peine conçue) comme *technique générale pour trouver;* ses aires et longueurs mesurées et mesurables ne représentaient jamais rien d'autre qu'elles-mêmes (à l'opposé de «l'algèbre d'école» paléo-babylonienne, voir note 17); ensuite, elle ne considérait que les entités appartenant «par nature» aux configurations traitées. Bien que nous ayons parlé jusqu'ici «d'algèbre» d'arpenteur, il faut donc conclure que la technique n'était *pas une algèbre tout court*, bien moins que ne l'était la technique d'*al-jabr*. Nous ne connaissons pas les mobiles d'al-Khwārizmī, et nous sommes ainsi hors d'état de les évaluer; mais jugeant sur le résultat nous devons nous avouer qu'il a fait le bon choix.

VI. La fin

A l'époque de Léonard, ce qui restait de cette moitié d'algèbre était donc réduit à l'état de fantôme. Mais comme le fantôme de la télévision qui – à en croire son alter ego Jean Ferrat – survécut à vingt directeurs, celui-ci avait la vie dure. Dans la partie géométrique de son *Summa de arithmetica*, Luca Pacioli déclare que

> bien que nous ayons parlé assez abondamment sur la règle d'algèbre dans la

partie traitant l'arithmétique, il faut encore en parler ici.[32]

Ce qu'il faut dire est exactement ce que dit Léonard dans la *Pratica* sur «l'algèbre d'arpenteur». Mais même si Luca suit en général le texte léonardien si fidèlement qu'on peut utiliser la *Pratica geometrie* pour corriger les erreurs typographiques de la *Summa*, il y a des exceptions. D'abord, Luca retourne à la tradition et parle des «quatre côtés et l'aire», là où Léonard, comme nous l'avons vu, avait inverti l'ordre des membres. En plus, là ou Léonard avait suivi le N° 38 d'Abū Bakr sans le corriger, Luca trouve l'aire du carré complémentaire comme «le carré sur la moitié du nombre des côtés», sans pour autant redresser l'autre erreur. La première déviation s'expliquerait si Luca avait eu accès à la traduction gérardienne, et la deuxième comme le résultat possible d'une reconstruction à partir du calcul algébrique — si seulement l'autre erreur avait aussi été corrigée. Prises ensemble et eu égard à l'absence de la deuxième correction, pourtant, les déviations de Luca ne s'expliquent que par l'emploi d'une autre source, inconnue à nous et liée directement à la tradition mathématique arabe.

L'ultime apparition, sinon du fantôme du moins de son ombre, semble être dans le *Libro de algebra en arithmetica y geometria* de Pedro Nunez [1567]. Le chapitre 7 de la troisième partie de cet ouvrage porte le titre «Sur la pratique de l'algèbre dans les cas et exemples de géométrie, et d'abord sur les carrés». Il est évident que Nunez s'appuie sur Luca, comme il le dit aussi dans l'épilogue. Selon le système de traduction que nous avons employé jusqu'ici, les exemples sur les carrés sont les suivants:

1. $s = 3$: Q?
2. $Q = \alpha$: s?
3. $s = 3$: d?
4. $d = 6$: s?
5. $d+s = 6$: d? s?
6. $d \cdot s = 10$: d? s?
7. $d-s = 3$: d? s?
8. $s \cdot (d-s) = 15$: s? d?
9. $d \cdot (d-s) = 14$: s? d?
10. $s+Q = 90$: s? Q?
11. $d+Q = 12$: Q? s?

[32] Citation de la deuxième édition, [Pacioli 1523:II, fol. 15^r]

12. $s+d+Q = 37$: s? d? Q?
13. $Q \cdot s = 10$: s? Q?
14. $d \cdot Q = 12$: s? Q?

A ce point-ci, pourtant, les traductions deviennent trompeuses. Tandis que tous les prédécesseurs posent des problèmes et montrent comment les résoudre, Nunez s'en tient au format des *Données* d'Euclide (déjà utilisé par Jordanus de Nemore dans son *De numeris datis*). Le N° 11, par exemple, déclare que «si le diamètre et l'aire pris ensemble sont connu, chacun pour soi sera connu». Alors seulement vient, au lieu de la démonstration générale d'Euclide et Jordanus, un exemple numérique. Là où les mathématiciens du Moyen âge avait transformé une collection de récréations mathématiques en discipline (en les intégrant avec la technique d'*al-jabr*), Nunez avance encore un peu, et se trouve à mi-chemin vers la création d'une *théorie* de l'algèbre. Pour la même raison il laisse tomber les algorithmes opaques, dernières survivances des procédures de découpage et de rassemblement – après tout, son but est de démontrer l'efficacité de l'algèbre comme outil général, «en arithmétique aussi bien qu'en géométrie», comme le déclare le titre du livre.

Mais précisément pour cette raison, une partie de ses *thèmes* sont empruntés à la tradition, tandis que les autres appartiennent visiblement au même genre tout en étant encore plus inaccessibles si l'on ne met pas à profit l'outillage algébrique. Il ne présente qu'un seul exemple de chaque espèce, et «les quatre côtés et l'aire» ont donc disparu. Pour une dernière fois, pourtant, «le côté» précède «l'aire» – comme jadis chez les arpenteurs akkadiens. Les «cas de géométrie» que Nunez présuppose connus sont donc (en partie au moins) vieux de plus de trois mille ans.

Moins de 30 ans après la parution de l'ouvrage de Nunez, Viète avait achevé la métamorphose de l'algèbre en théorie. Si l'algèbre avait encore besoin d'affichage, de nouveaux triomphes bien plus frappants étaient à portée de main. «Les quatre côtés et l'aire», comme la lignée toute entière, semblent avoir quitté entre-temps le monde si discrètement que personne ne s'en aperçut, et que personne ne se souvenait d'elles. Neugebauer [MKT III, 14], quand il rencontra la version paléo-babylonienne trois siècles plus tard, était incliné à croire à une erreur de scribe qui – par pur hasard – rimait mathématiquement.

Bibliographie

Baqir, Taha, 1951. "Some More Mathematical Texts from Tell Harmal". *Sumer* 7, 28–45.

Baqir, Taha, 1962. "Tell Dhiba'i: New Mathematical Texts". *Sumer* 18, 11–14, pl. 1–3.

Boncompagni, Baldassare (éd.), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Vol. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Busard, H. L. L., 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le »Liber mensurationum« d'Abû Bekr". *Journal des Savants*, Avril–Juin 1968, 65–125.

Clagett, Marshall, 1984. *Archimedes in the Middle Ages*. Vol. V. *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century*. (Memoirs of the American Philosophical Society, 157 A+B). Philadelphia: The American Philosophical Society.

Curtze, Maximilian (ed.), 1902. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, vol. 12–13). Leipzig: Teubner.

Folkerts, Menso, 1978. "Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 6. Abhandlung (Wien).

Friberg, Jöran, 1990. "Mathematik". *Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie* VII, 531–585. Berlin & New York: de Gruyter.

Høyrup, Jens, 1986. "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra". *Erdem* 2 (Ankara), 445–484.

Høyrup, Jens, 1990. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* 17, 27–69, 262–354.

Høyrup, Jens, 1990a. "Sub-Scientific Mathematics. Observations on a Pre-Modern Phenomenon". *History of Science* 28, 63–86.

Høyrup, Jens, 1990c. "*Dýnamis*, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* 17, 201–222.

Høyrup, Jens, 1991. "'Oxford' and 'Cremona': On the Relations between two Versions of al-Khwārizmī's *Algebra*". *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række: *Preprints og Reprints* 1991 nr. 1. A paraître dans *Proceedings of the 3rd Maghrebian Symposium on the History of Mathematics Alger, 1–3 December 1990*.

Høyrup, Jens, 1992. "'Algèbre d'*al-ǧabr*' et 'algèbre d'arpentage' au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne", pp. 83–110 *in* Fr. Mawet & Ph. Talon (éds), *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge*. Actes du Colloque international, Université Libre de Bruxelles, 3–4 novembre 1989 (Lettres Orientales, 2). Leuven: Peeters.

Høyrup, Jens, 1993. "'Remarkable Numbers' in Old Babylonian Mathematical Texts: A Note on the Psychology of Numbers". *Journal of Near Eastern Studies* 52, 281–286.

Hughes, Barnabas, O.F.M., 1986. "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's *Al-Jabr*: A Critical Edition". *Mediaeval Studies* 48, 211–263.

Levey, Martin (éd., trad.), 1966. The *Algebra* of Abū Kāmil, *Kitāb fī al-jābr* (sic) *wa'l-muqābala*, in a Commentary by Mordechai Finzi. Madison etc: University of Wisconsin Press.

Libri, Guillaume, 1838. *Histoire des mathématiques en Italie*. 4 vols. Paris, 1838–1841.

Luckey, Paul, 1941. "Ṯābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen". *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, 93–114.

MKT: O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte*. I–III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster–dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937.

Mueller, Ian, 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge, Mass., & London: MIT Press.

Mušarrafa, 'Alī Muṣṭafā, & Muḥammad Mursī Aḥmad (éds), 1939. al-Khwārizmī, *Kitāb al-muḥtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābalah*. Caïro.

Nunez, Pedro, 1567. *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Anvers: En casa de los herederos d'Arnaldo Birckman.

Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganino.

Rosen, Frederic (éd., trad.), 1831. The *Algebra* of Muhammad ben Musa, Edited and Translated. London: The Oriental Translation Fund.

Ruska, Julius, 1917. "Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst". *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse*, Jahrgang 1917, 2. Abhandlung.

Saliba, George A., 1972. "The Meaning of al-jabr wa'l-muqābalah". *Centaurus* 17, 189–204.

Whiting, Robert M., 1984. "More Evidence for Sexagesimal Calculations in the Third Millennium B.C." *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 74, 59–66.

ISSN 0902-9028