ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Institut for Kommunikationsforskning, Uddannelsesforskning og Videnskabsteori

ROSKILDE UNIVERSITY, DENMARK
Institute of Communication Research, Educational Research and Theory of Science

FILOSOFI OG VIDENSKABSTEORI PÅ ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

3. *Række: Preprints og reprints*
1990 Nr. 2

»ALGEBRE D'*AL-GABR*« ET »ALGEBRE D'ARPENTAGE«AU NEUVIEME SIECLE ISLAMIQUE ET LA QUESTION DE L'INFLUENCE BABYLONIENNE

Par JENS HØYRUP

»*ALGEBRE D'AL-ĞABR*« ET »ALGEBRE D'ARPENTAGE« AU NEUVIEME SIECLE ISLAMIQUE ET LA QUESTION DE L'INFLUENCE BABYLONIENNE

By JENS HØYRUP

DÉDIÉ A I. M. DIAKONOFF

TABLE DES MATIERES

I. Al-ǧabr

A la cour du Calife al-Maʾmūn (813-833 P.C.) à Baghdad, toute une foule de mathématiciens étaient à l'oeuvre. Parmi eux figurait al-Khwārizmī (fl. 800-847), qui est connu entre autres choses pour son *Algèbre* (*Kitāb al-ǧabr wa'l-muqābalah*, »Livre sur *al-ǧabr* et *al-muqābalah*), le premier traité complet sur ce sujet qui nous soit parvenu[1]. Naturellement, son contenu et ses méthodes sont différents de ce que l'on trouve dans les livres modernes, aussi bien les livres enseignant l'algèbre littérale que ceux qui présentent la théorie des groupes et les autres domaines de l'algèbre abstraite. D'autre part, l'algèbre d'al-Khwārizmī est étonnamment proche de ce qui a porté ce nom dans l'Occident latin jusqu'à Pierre de la Ramée.

Pour comprendre ce qu'est l'algèbre pour al-Khwārizmī nous pouvons considérer quelques passages extraits de son livre

> Si une personne te demande ceci: »J'ai divisé *dix* en deux parties, et quand j'ai multiplié l'une par l'autre, *vingt et un* advint«; alors tu sais que l'une des deux parties est *chose* et l'autre *dix moins chose*. Multiplie donc *chose* par *dix moins chose*; tu auras alors *dix*

[1] Le sens originel des deux termes n'est pas tout à fait clair, surtout parce que les textes arabes les emploient sans cohérence (voir Saliba 1972). Normalement, *al-ǧabr* signifie »restauration« dans une équation, soit en multipliant par 2 l'équation $^1/_2x^2+5x=28$ (al-Khwārizmī, dans Rosen 1831: 10), soit en éliminant les membres soustractifs par addition des deux côtés d'une équation; *al-muqābalah* (réduction) signifie le plus souvent l'élimination d'un membre par soustraction des deux côtés. Au total pourtant, l'usage terminologique varie tellement qu'on peut supposer que ses origines étaient déjà perdues lorsque la tradition écrite arabe a commencé.

choses moins un trésor, ce qui égale *vingt et un*. Sépare le *trésor* des *dix choses* et ajoute-le au *vingt et un*. Alors tu auras *dix choses*, qui égalent *vingt et un dirhems et un trésor*. Enlève la *moitié des racines* et multiplie le *cinq* qui reste par lui-même; c'est *vingt-cinq*. Enlèves-en le *vingt et un* associé avec le trésor; le reste est *quatre*. Extrais sa racine, c'est *deux*. Enlève-le de la *moitié des racines*, à savoir *cinq*; reste *trois*, qui est une des deux parties. Ou, si tu préfères, tu peux ajouter la *racine de quatre* à la *moitié des racines*. La somme est *sept*, ce qui est aussi une des parties.[2]

Pour suivre l'argument, il faut savoir que la *chose* (*šayʾ*) occupe le même rôle qu'un *x* moderne; que le *trésor* (*māl*) est le carré de l'inconnue et que la *racine* (*jidhr*) est la racine de ce carré (ou plutôt: le *trésor* est *un nombre carré inconnu*, tandis que la *racine* est la racine de ce nombre); ici, la *chose* égale la *racine*. Le *dirhem* est une unité monétaire, qui sert comme unité des nombres purs (ce qui évidemment correspond bien à l'identification du nombre inconnu avec »un trésor«). La »moitié des racines«, enfin, est à comprendre comme la moitié du *coefficient* ou du *nombre* des racines (on rencontre souvent cette même manière de s'exprimer dans les sources arabes). Avec ces explications, la première section de la procédure se laisse facilement traduire en symboles modernes:

$$x \cdot (10-x) = 21 \;\Rightarrow\; 10x-x^2 = 21 \;\Rightarrow\; 10x = 21+x^2$$

ou bien, avec $Y = x^2$

$$\sqrt{Y} \cdot (10-\sqrt{Y}) = 21 \;\Rightarrow\; 10\sqrt{Y}-Y = 21 \;\Rightarrow\; 10\sqrt{Y} = 21+Y$$

---

[2] Traduction anglaise de Rosen (1831: 41f), collationnée avec et corrigée d'après les traductions latine de Gérard de Crémone (éd. Hughes 1986) et russe de Boris Rozenfeld (en Siraždinov 1983), plus littérales toutes les deux; mon arabe plus que rudimentaire ne m'a permis, ici et dans les citations qui suivront plus bas, que des contrôles spécifiques (faits sur le texte arabe donné par Rosen et utilisé aussi par Rozenfeld) de certains passages où les traductions divergeaient.

Comme toutes les versions françaises qui suivent, celle-ci est faite par l'auteur de l'article; l'idéal poursuivi est une littéralité compréhensible plutôt que le style poli.

Les caractères italiques sont ajoutés pour faciliter la compréhension et la comparaison avec la notation symbolique.

Ce qui se passe après est d'un style différent et correspond plutôt à une solution suivant une formule fixe:

$$ax = b+x^2 \Rightarrow x = {}^a/_2 \cdot \sqrt{[({}^a/_2)^2-b]}.$$

En d'autres mots, la dernière partie de la procédure fait usage d'un *algorithme standardisé.*

De fait, cet algorithme a déjà été exposé dans un chapitre précédent, où l'on trouve ceci:

> *trésors et nombres égalent racines;* c'est comme si tu dis, »un trésor et vingt et un en nombres égalent dix racines du même trésor«. C'est-à-dire, quel sera le montant du trésor qui, quand on y ajoute vingt et un dirhems, égale l'équivalent de dix racines du même trésor? Solution: Divise en deux les racines; la moitié est cinq. Multiplie-le par lui-même; il en advient vingt-cinq. Enlèves-en le vingt et un associé avec le trésor; le reste est quatre. Extrais sa racine, c'est deux. Enlève-le de la moitié des racines, qui est cinq; reste trois. Ceci est la racine du trésor que tu demandais et le trésor est neuf. Ou tu peux ajouter la racine à la moitié des racines; ce sera sept; c'est la racine du trésor que tu demandais et le trésor lui-même est quarante-neuf.
>
> Quand tu rencontres un exemple qui te conduit à ce cas-ci, essaie la solution par addition, et si cela n'aide pas, la soustraction servira certainement. Parce que dans ce cas addition aussi bien que soustraction peut être employée, ce qui ne vaut aucun autre des trois cas où il faut diviser en deux les racines.[3]

Les trois »cas« en question sont les équations du deuxième degré à trois membres, nommées le »quatrième«, »cinquième« et »sixième cas«. »Trésors et nombres égalent racines« en est le cinquième. Le quatrième est décrit de cette manière:

> *Racines et trésors égalent nombres;* c'est comme si tu dis, »un trésor et dix racines du même, égalent trente-neuf dirhems«; c'est-à-dire,

[3] Traduction anglaise Rosen 1831: 11f, collationnée avec et corrigée d'après les traductions latine et russe.

> quel sera le trésor qui, quand on l'augmente de dix de ses propres racines, se monte à trente-neuf? La solution est celle-ci: Tu divises en deux les racines, ce qui dans la question présente donne cinq. Tu multiplies ceci par lui-même; ce sera vingt-cinq. Ajoute ceci à trente-neuf; la somme est soixante-quatre. Prends-en maintenant la racine, qui est huit, et enlèves-en la moitié des racines, qui est cinq; reste trois. C'est la racine du trésor que tu cherchais; le trésor lui-même est neuf.[4]

Le dernier cas »où il faut diviser en deux les racines« (le sixième cas) est évidemment »racines et nombres égalent des trésors«, qui possède son propre algorithme[5]. Ces trois cas complexes sont précédés de trois cas plus simples, à savoir »trésors égalent des racines«, »trésors égalent des nombres« et »racines égalent des nombres«, où l'on ne trouve pas d'algorithme proprement dit, mais où les solutions données sont regardées comme (et sont en effet) intuitivement évidentes.

Après avoir formulé et illustré les divers algorithmes pour résoudre les trois équations complexes, al-Khwārizmī donne enfin des preuves géométriques que ses algorithmes sont corrects. Le cas le plus simple est celui où »un trésor et dix racines égalent trente-neuf dirhems«:

> La figure pour expliquer ceci est un carré[6], dont les côtes sont inconnus. Il représente le trésor, lequel, et la racine duquel, tu demandes à connaître. Ceci est la surface AB, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines; et si tu multiplies un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le montant de ce nombre peut être regardé comme le nombre de racines qui est ajouté au trésor. Chaque côté du carré représente la racine du

[4] Traduction anglaise Rosen 1831: 8, collationnée avec et corrigée d'après les traductions latine et russe.

[5] Puisqu'al-Khwārizmī ne considère que les nombres positifs, les seules équations normalisées à trois membres possédant des solutions sont $x^2+ax=b$, $x^2+b=ax$ et $x^2=ax+b$.

[6] Le mot arabe est *murabbaʿ*, littéralement »[figure] à quatre [côtés]«; quand les Arabes ont assimilé la géométrie grecque, ils l'ont employé en particulier au sens de »quadrilatère régulier« ou »carré«.

trésor; et, comme dans ce cas, dix racines étaient associées avec le trésor, nous pouvons prendre un quart des dix, à savoir deux et demi, et faire de chaque quart ensemble avec un des côtés de la surface une surface. Donc, avec la surface originale AB, quatre nouvelles surfaces égales sont combinées, chacune ayant une racine comme longueur, et deux et demi comme largeur; ce sont les surfaces C, G, T et K. Nous avons maintenant une surface à côtés égaux et également inconnus, mais à laquelle il manque dans chacun des quatre coins une pièce de deux et demi multiplié par deux et demi. Pour compenser ce défaut et compléter la surface carrée il faut ajouter quatre fois deux et demi multiplié par lui-même, c'est-à-dire, vingt-cinq. Nous savons que la première surface, à savoir, la surface représentant le trésor, en même temps que les quatre surfaces qui l'entourent et qui représentent les dix racines, égalent trente-neuf en nombres. Si à cela nous ajoutons vingt-cinq, ce qui est l'équivalent des quatre carrés aux coins de la surface AB par lesquels la grande surface DH est complétée, alors nous savons que cela fait ensemble soixante-quatre, et qu'un de ses côtés est sa racine, c'est-à-dire huit. Si nous enlevons deux fois un quart de dix, c'est-à-dire cinq, de huit, comme des deux extrémités du côté de la grande surface, c'est-à-dire la surface DH, alors le reste d'un tel côté sera trois; ceci est le côté de la surface originale AB ou la racine du trésor. Il faut observer que nous n'avons divisé les dix racines et ajouté à trente-neuf le produit de la moitié multipliée par elle-même que pour compléter la grande figure dans ses quatre coins; parce qu'un quart d'un nombre quelconque multiplié par lui-même et après par quatre, égale le produit de la moitié de ce nombre multipliée par elle-même. Pour cette raison nous avons seulement multiplié la moitié des racines par elle-même, au lieu de multiplier le quart par lui-même et après par quatre. Ceci est la figure:

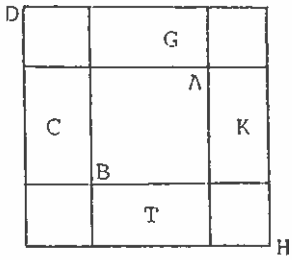

FIGURE 1

Il y a une autre figure qui conduit à la même chose. C'est la surface AB, qui représente le trésor. Nous voulons donc lui ajouter ses dix racines. Pour ce faire nous divisons les dix en deux, ce qui devient cinq, et nous construisons deux surfaces sur deux côtés d'AB, à savoir les surfaces G et D, dont les longueurs égalent cinq, ce qui est la moitié des dix racines, tandis que la largeur de chacun d'eux égale le côté du carré AB. Alors cinq sur cinq nous manque opposé au coin de AB: ce cinq étant cette moitié des dix racines que nous avons ajoutées à deux des côtés de la première surface. Nous savons donc que la première surface, qui est le trésor, et les deux surfaces sur ses côtés, qui sont les dix racines, font ensemble trente-neuf. Pour compléter la grande surface en carré, seul cinq sur cinq fait défaut, ou vingt-cinq. Nous ajoutons ceci à trente-neuf, pour compléter la grande surface SH. La somme est soixante-quatre. Nous extrayons sa racine, huit, qui est un des côtés de la grande surface. En lui enlevant la même quantité que nous lui avons ajoutée antérieurement, à savoir cinq, nous obtenons trois comme reste. Ceci est le côté de la surface AB, qui représente le trésor; c'est la racine de ce trésor et le trésor lui-même est neuf. Ceci est la figure:—[7]

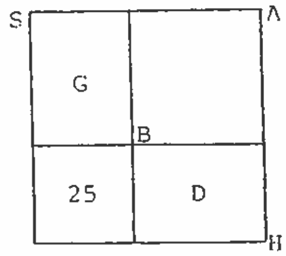

FIGURE 2

Nous avons vu ici les trois composantes de l'algèbre al-Khwārizmien: les problèmes complexes sont réduits aux »cas« fondamentaux moyennant des techniques dites »rhétoriciennes«, c'est-à-dire des transformations analogues à nos transformations symboliques, mais utilisant des noms, des mots et des phrases complètes. Comme c'est le cas pour les transformations symboliques les procédures rhétoriciennes sont (intuitivement) leurs propres preuves. Les équations fondamentales sont résolues au moyen d'algorithmes fixes, eux-mêmes proposés sans aucun argument en dépit de leur impénétrabilité pour l'intuition immédiate. Enfin, des démonstrations géométriques de la justesse des algorithmes sont données.

Plusieurs observations peuvent être faites sur les textes cités. D'abord, les démonstrations géométriques ne concernent en vérité que des exemples spécifiques, bien que la généralisation aux cas parallèles est évidente. De plus, elles sont »naïves«: Si on les compare aux dé-

[7] Traduction anglaise Rosen 1831: 13-16, collationnée avec et corrigée d'après les traductions latine et russe.

monstrations analogues dans le livre II des *Éléments* d'Euclide, on remarque qu'il n'y a pas de doute pour al-Khwārizmī que, par exemple, les figures qui font défaut dans les coins des grands carrés sont, elles aussi, des carrés; tout ce qui »se voit« immédiatement est accepté. Deux signes seulement d'inspiration grecque sont présents: l'utilisation de lettres pour désigner les figures et l'emploi de la première personne pluriel au lieu des formes verbales prescriptives.

Deuxièmement, il faut remarquer que seules les démonstrations sont géométriques. Le »trésor« est *un nombre* et sa racine de même[8]. Apparemment, al-Khwārizmī prend grand soin d'expliquer encore et encore que le carré des démonstrations *représente* le trésor; évidemment les deux appartiennent à des catégories tout à fait différentes. De même, les »choses« et »racines« désignent des nombres et les transformations rhétoriciennes sont d'ordre purement arithmétique. Après une introduction dédicatoire au Calife, en fait, l'oeuvre commence avec l'explication suivante:

> Quand je considérais ce dont les gens ont normalement besoin

---

[8] Ceci n'est pas tout à fait clair dans la plupart des traductions courantes. Rosen, par exemple, traduit *māl* par »square« et *murabba'* par »quadrate«, ce qui peut aisément conduire à des interprétations géométriques mal fondées du premier terme.

Le sens numérique et quasi-monétaire du terme *māl* correspond parfaitement à son emploi dans les problèmes du premier degré, du type »Si tu ajoutes à un trésor sa moitié; si tu ajoutes un quart du résultat; si enfin tu enlèves un dixième du total: alors il te reste 20 dirhems. Quel est le montant du trésor?« (al-Karajī, *Kāfī fi'l-ḥisāb* lxx, traduction allemande Hochheim 1878: III, 14). Chez certains historiens des mathématiques cela a conduit à des confusions amusantes. Ainsi, connaissant mieux l'algèbre médiévale que les problèmes sur les transactions commerciales, Libri (1838: I, 304ff) a trouvé le terme *census* (la traduction établie du *māl*) dans un *Liber augmenti et diminutionis* ne contenant que des problèmes du premier degré résolus au moyen de la méthode des »fausses positions«: il considère la terminologie »confondue«, mais traduit systématiquement le montant monétaire inconnu comme x^2, bien que le plus souvent cela conduira à un x irrationnel (et que, bien sûr, le x supposé n'est ni demandé ni jamais trouvé).

On peut remarquer que le terme arabe *māl* correspond au terme θησαυρός employé dans certains problèmes gréco-égyptiens du premier degré (Papyrus Akhmîm, éd. Baillet 1892: 86ff).

dans le domaine du calcul, je trouvai que c'était toujours un nombre.

[...]

J'observai que les nombres qui sont nécessaires pour calculer par *al-ǧabr wa'l-muqābalah* sont de trois sortes, à savoir, racines, trésors et nombres simples sans regard ni à racine ni à trésor.

Une racine est une quantité quelconque qui sera multipliée par elle-même, consistant en unités ou nombres ascendants ou fractions descendantes.

Un trésor est le montant total d'une racine multipliée par elle-même.

Un nombre simple est un nombre quelconque qui peut être prononcé sans référence à racine ou trésor.[9]

Le traité d'al-Khwārizmī est le premier à nous être parvenu dans toute son étendue. Mais al-Khwārizmī n'a pas été le seul à son époque à écrire sur le sujet. En effet, un certain ibn Turk, plus ou moins son contemporain, a écrit un traité du même titre, dont un seul chapitre a survécu[10], contenant des démonstrations très proches de celles d'al-Khwārizmī, mais apparemment indépendantes des siennes (d'après des critères terminologiques). Les formulations sont un peu plus raffinées, mais les démonstrations sont au fond du même caractère »naïf« que celles d'al-Khwārizmī. Les différences les plus grandes sont peut-être, premièrement, qu'ibn Turk donne une démonstration géométrique pour le cas simple »trésors égalent des racines«; deuxièmement qu'il ne donne pas la première des démonstrations du cas »trésors et racines égalent nombre« (celui utilisant quatre rectangles supplémentaires); troisièmement que ses cas mixtes parlent toujours d'un seul trésor, tandis qu'al-Khwārizmī en parle au pluriel (mais présuppose, avant de donner l'algorithme, que l'équation aura été normalisée).

Un demi-siècle peut-être après al-Khwārizmī, Thābit ibn Qurra (c.

---

[9] Traduction anglaise Rosen 1831: 5, collationnée avec et corrigée d'après les traductions latine et russe.

[10] Éd., trad. Sayılı 1962.

834 à 900) a écrit un petit traité avec des démonstrations géométriques sur la justesse des méthodes des »gens d'algèbre«[11]. Une fois encore, il s'agit des algorithmes utilisés pour résoudre les équations mixtes normalisées. Thābit parle des cas fondamentaux comme le fait ibn Turk, avec un seul trésor. Ses preuves sont euclidiennes et consistent, en fait, en réductions aux théorèmes II.5 et II.6 des *Éléments*. Il ne dit mot de l'existence de démonstrations géométriques d'un autre style—évidemment, *al-ǧabr* pour Thābit (le nom qu'il utilise pour toute la discipline) ne s'identifie pas avec le livre d'al-Khwārizmī; c'est une technique appartenant à tout un groupe de praticiens des mathématiques. Ce qui les caractérise, c'est l'application des *algorithmes fixes*, et c'est à ces algorithmes qu'il trouve des justifications euclidiennes.

Al-Khwārizmī lui-même, en fait, nous informe qu'il n'a pas inventé la discipline. Dans l'introduction dédicatoire il raconte que le Calife l'a encouragé à

> »composer un bref traité sur le calcul par *al-ǧabr* et *al-muqābalah*, réduit à ce qui est brillant et d'importance dans les arithmétiques utilisées constamment dans les affaires d'héritages et les legs, dans les partages et les procès, dans le commerce et dans toutes leurs affaires d'arpentage des terres, de creusement de canaux, de calculs géométriques et d'autres choses variées de pareille sorte«[12].

Ce qui est »d'importance dans les arithmétiques utilisées [...]« est traité dans les deux derniers tiers de l'ouvrage: La règle de trois, l'arpentage et le calcul des héritages (fait par algèbre rhétoricienne du premier degré). Le premier tiers, l'algèbre de deuxième degré, est inutilisable et doit donc appartenir à la catégorie du »brillant« ou »agréable« (*laṭīf*). En tout cas, les deux catégories existent déjà, la »brillante« non moins que l'utilitaire, et al-Khwārizmī n'a fait »que« produire une oeuvre de

---

[11] Éd., trad. Luckey 1941.

[12] Traduction anglaise Rosen 1831: 3, collationnée avec la traduction russe (l'introduction est omise par Gérard de Crémone) et avec corrections inspirées par Ruska 1917: 5.

synthèse des disciplines et techniques des calculateurs pratiques, y compris la superstructure »pure«.

Cette dernière expression nécessite une explication. La sagesse conventionnelle distingue les mathématiques »appliquées« ou »pratiques«, aujourd'hui le domaine des ingénieurs et des comptables et avant l'ère moderne de divers »praticiens mathématiques«, et les mathématiques »pures« ou »scientifiques« inventées par les Grecs et le domaine des vrais mathématiciens. Parler d'une superstructure »pure« appartenant aux praticiens peut donc surprendre. En fait, pourtant, tout groupe professionnel de calculateurs tend à produire une telle superstructure: des problèmes qui ressemblent formellement aux problèmes rencontrés dans la vie professionnelle, mais qui demandent plus d'ingéniosité que les tâches de tous les jours. Cette superstructure remplit toute une gamme de fonctions: l'entraînement des apprentis; l'amusement et la récréation; enfin, l'affermissement de l'identité et la solidarité professionnelle.

L'importance de l'amusement dans l'enseignement mathématique est bien connus de tous les pédagogues qui ne croient pas, comme les anciens maîtres d'école égyptiens, que »l'écolier écoute le mieux avec son dos«. Le rôle de la récréation pour l'identité professionnelle peut paraître plus surprenante. Néanmoins, on en parle parfois dans les sources; les formules peuvent être »dis-moi, si tu es un calculateur accompli, combien [...]«, indiquant que le problème est une énigme qui ne peut être résolue que par les membres (les vrais membres!) de la profession; ou bien »comment trouver, à l'ébahissement des non-initiés, [...]«. Normalement, bien sûr, on ne trouve pas de telles explications dans les anciennes collections de problèmes de récréation. Les milieux de praticiens, en effet, ne nous ont pas laissé des écrits; leur enseignement et leurs amusements professionnels étaient, sinon oraux, du moins supportés par des écrits éphémères. Les recueils ont été faits par des mathématiciens, des savants ou des antiquistes et ont à peu près le même rapport avec leur origine professionnelle que les nouvelles de Boccaccio, les contes de Perrault et les fables de la Fontaine avec les traditions orales populaires d'où ils prennent une partie appréciable de leur matière.

Dans quelques cas rares, la situation a été différente. Dans la Babylonie de l'époque de Hammurapi et dans l'Égypte du deuxième millénaire avant J.C., l'éducation des *scribes* (pour qui le calcul était non moins important que l'écriture) était du ressort d'une école bien organisée et institutionnalisée. Là, l'écriture était employée pour fixer et systématiser les méthodes de calcul mathématique. Dans ce cas, pourtant, comme dans celui des »énigmes pour calculateurs« des traditions orales, les problèmes sont sélectionnés ou construits afin de faire employer les méthodes existantes; c'est que le but des problèmes est ou de *démontrer ce qu'on peut faire avec le stock de méthodes possédées par la profession* ou d'exercer ces méthodes chez les apprentis ou écoliers. Donc, les méthodes ont la primauté et les problèmes en sont dérivés.

Dans les mathématiques »scientifiques«, c'est-à-dire de tradition grecque, ces rôles respectifs des méthodes et des problèmes sont inversés. Ici (comme naturellement dans la *vraie pratique* des calculateurs professionnels) les problèmes sont primaires et, si les méthodes permettant leur solution n'existent pas déjà, il faut les inventer. Pour cette raison, j'ai essayé[13] d'introduire le terme »sous-scientifique« pour le savoir des professions pratiques pré-modernes, comme par exemple des calculateurs: un terme qui le distingue du savoir comme but en soi-même de la philosophie et des mathématiques grecques, mais qui en même temps indique qu'il n'est pas restreint à une collection de recettes transmises sans compréhension ni ambition intellectuelle.

L'algèbre du deuxième degré est donc le niveau pur et inutilisable du calcul pratique de l'entourage d'al-Khwārizmī, nécessitant un haut niveau d'ingéniosité en calcul pratique; en bref le niveau »brillant«. Apparemment, c'est ce niveau seulement qui est désigné *al-ǧabr*, à en croire l'introduction, selon laquelle *al-ǧabr wa'l-muqābalah* s'occupe de

[13] Par exemple dans mes [1987] et [1990a].

»trésors«, »racines« et »nombres simples« (une autre source citée plus bas pourrait pourtant indiquer que l'algèbre rhétoricienne de la »chose« y appartient aussi). En combinant les témoignages d'al-Khwārizmī, d'ibn Turk et de Thābit ibn Qurra nous pouvons conclure: que cette discipline reposait sur une tradition; qu'elle comprenait les réductions rhétoriciennes aux cas fondamentaux et la solution de ces cas au moyen d'algorithmes fixes; finalement, que les démonstrations géométriques de la justesse de ces algorithmes n'y appartenaient pas.

D'autre part pourtant, les démonstrations naïves furent traditionnelles elles aussi. Comment expliquer sans cela que les mêmes démonstrations furent utilisées indépendamment par al-Khwārizmī et ibn Turk, en dépit de leur déviation des normes euclidiennes bien connues d'eux—l'usage de lettres pour désigner les parties des figures géométriques est une importation grecque et des collègues d'al-Khwārizmī à la cour du Calife ont traduit et commenté les *Éléments* et d'autres oeuvres grecques. De plus, al-Khwārizmī nous raconte indirectement qu'il n'a pas inventé ces preuves géométriques lui-même. Après la présentation des cas fondamentaux et des algorithmes correspondants et après les démonstrations viennent des explications d'un nombre de règles arithmétiques, parmi elles les réductions $(20-\sqrt{200})+(\sqrt{200}-10)=10$, $(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=30-2\sqrt{200}$ et $(50+10r-2t)+(100+t-20r)=150-t-10r$ (r=racine, t=trésor). Pour les deux premiers, des démonstrations géométriques sont données, d'un style assez différent des démonstrations montrées plus haut (les nombres sont représentés par des segments coupés sur des droites); pour le troisième cas, al-Khwārizmī explique,

> l'on ne peut construire aucune figure, parce qu'il y a trois différentes espèces, à voir trésors, racines et nombres, et rien qui y correspond et par quoi ils pourraient être représentés. En effet nous avions imaginé une figure pour ce cas aussi, mais elle n'était pas suffisamment claire.

L'explication par des mots est très simple [...][14]

et donnée par les techniques rhétoriciennes coutumières. En ce qui concerne ces démonstrations géométriques-ci, al-Khwārizmī les a donc construites lui-même, tandis que les précédentes sont présentées comme existant déjà.

II. *Le Liber mensurationum*

Bien sûr, des arguments qui reposent sur la tournure précise des phrases conduisent aisément à l'erreur. Sans autre témoignage, la préexistence des techniques de géométrie naïve resterait une hypothèse. Heureusement, il existe encore un traité de mathématique qui éclaircit la question de façon inattendue.

Malheureusement, pourtant, le traité en question n'est connu qu'en traduction latine[15]—une traduction faite par Gérard de Crémone dans la deuxième moitié du douzième siècle et, semble-t-il, très littérale, comme le sont d'habitude ses traductions.

L'auteur du traité est un certain Abū Bakr; mais, du fait qu'il en existe partout dans le monde islamique et à toutes les époques, cela ne nous aide guère pour situer le traité dans le temps ou dans l'espace.

---

[14] Traduction anglaise Rosen 1831: 34, collationnée avec et corrigée d'après les traductions latine et russe.

[15] Édition critique par Busard (1968). Il se peut qu'il existe des manuscrits arabes non publiés. Roshdi Rashed (communication personnelle faite loin des sources) pense en avoir vus et pense se souvenir de figures analogues à celles (manquantes dans la version latine) dont il sera question plus bas.

Une étude assez approfondie du traité se trouve dans mon [1986], qui est le fondement de bien des éléments de la présente étude.

D'autre part, les traducteurs latins n'ont trouvé que très peu de travaux récents en Espagne au douzième siècle; pour cette raison, il semble raisonnable de supposer une origine au neuvième ou dixième siècle. Des considérations de vocabulaire[16] suggèrent une date pas trop différente de celles d'al-Khwārizmī et d'ibn Turk et la même chose vaut pour le contenu mathématique.

Le titre latin du traité est *Liber mensurationum*, »Traité d'arpentage«. Il est composé de deux parties, dont la deuxième (propositions 65-158) est précisément ce que promet le titre, un traité dans la tradition Héronienne sur la mesure des champs et des corps—plus précisément, sur la détermination de l'aire et du volume à partir des dimensions linéaires. La première partie, pourtant, celle qui nous occupera ici, est tout à fait différente. Un premier chapitre (propositions 1-19) est consacré aux »quadrilatères équilatéraux et à angles droits«. Des 19 propositions, les deux premières seulement concernent réellement l'arpentage (la détermination de l'aire et de la diagonale à partir du côté), tandis que les numéros 10 et 11 peuvent à la rigueur être acceptés. Toutes les autres sont artificielles et appartiennent au domaine du »brillant«. En abréviation symbolique (où c est le côté, A l'aire et d la diagonale) les données sont les suivantes:

3. $c+A=110$
4. $4c+A=140$
5. $A-c=90$
6. $A-4c=60$
7. $4c={}^2/_5\cdot A$

[16] Bien sûr, »Wer terminologiegeschichtliche Studien an Hand einer *Übersetzung* machen will, dem ist doch nicht zu helfen« (»qui veut étudier l'histoire des terminologies par des traductions ne peut de toute façon être sauvé«), comme dit Neugebauer (MKT III, 5). Mais la traduction de Gérard est assez précise pour nous assurer qu'Abū Bakr emploie encore, même en géométrie, le mot *murabbaʿ* dans le sens général de »quadrilatère« seulement et qu'il parle d'un carré comme d'un *murabbaʿ équilatéral et à angles droits* (Gérard a *quadratum equilaterum et orthogonium*), précisément comme le fait ibn Turk.

8. $4c=A$
9. $4c-A=3$
10. $d=\sqrt{200}$; $c=?$
11. $d=\sqrt{200}$; $A=?$
12. $4c+A=60$
13. $A-3c=18$
14. $4c={}^{3}/_{8}\cdot A$ (texte corrompu)
15. $A/d=7^{1}/_{2}$
16. $d-c=4$
17. $d-c=5$
18. $d=c+4$
19. $A/d=7^{1}/_{14}$

D'un point de vue moderne, les problèmes artificiels sont des problèmes algébriques. Pour voir comment Abū Bakr les considérait, nous pouvons regarder son traitement du numéro 3, analogue au premier cas mixte d'al-Khwārizmī:

> Si quelqu'un t'aura dit: J'ai additionné le côté et l'aire et ce qui en advint était 110[17]. Combien est donc son côté?
>
> La méthode dans ceci sera que tu prends la moitié du côté comme moitié et que tu la multiplies avec elle-même, dont advient ${}^{1}/_{4}$, ce que tu ajoutes à 110. Ce sera $110^{1}/_{4}$, dont tu prends la racine, qui est $10^{1}/_{2}$, de laquelle tu enlèves la moitié et 10 resteront qui est le côté. Voici!
>
> Il y a pour cela aussi un autre mode selon *al-ǧabr* qui est que tu poses le côté comme chose et multiplies celle-ci avec elle-même et ce qui en advient sera le trésor qui sera l'aire. Ajoute-le donc au côté selon ce que tu as posé et ce qui en advient sera un trésor et une chose qui égalent 110. Agis donc selon ce qu'on t'a appris en

[17] Abū Bakr a probablement écrit ses nombres en toutes lettres. Mais puisque sur ce point précis Gérard n'est pas littéral (ou, plutôt, utilise un manuscrit qui est corrompu à cet égard), mélangeant des nombres verbaux, les chiffres »hindous« et les chiffres romains sans aucun système, je traduirai tout en chiffres hindous.

> *al-ǧabr*[18], c'est-à-dire que tu divises en deux la chose et tu la multiplies avec elle-même et ce qui en advient tu l'ajoutes à 110; tu prends la racine de ce que tu as additionné et tu l'enlèves de la moitié des racines. Ce qu'il en reste alors sera le côté.[19]

Le problème peut donc être résolu selon deux méthodes proclamées différentes, dont la dernière est identique à *al-ǧabr* d'al-Khwārizmī, parlant de trésor et choses et utilisant l'algorithme familier du »quatrième cas«[20]. Comme dans le passage cité d'al-Khwārizmī, aussi, Abū Bakr explique soigneusement que le trésor représente l'aire du carré. Paradoxalement, pourtant, les pas numériques sont les mêmes selon les deux méthodes. Ce qui manque à la première n'est apparemment que les mots-clefs; d'autre part, elle a encore le mystérieux »voici«.

Le mot latin est »intellige«. La traduction »voici« peut paraître mal fondée, mais s'explique par une autre traduction Gérardienne. Dans un fragment sur la construction de l'heptagone, la dernière partie critique une méthode approximative utilisée par les Indiens; en conclusion, le texte nous raconte que les Indiens ne possèdent comme démonstration de la validité de leur méthode que »l'invention *intellige ergo*«[21]. Cela, pourtant, correspond précisément à la manière répandue chez les mathématiciens (ou les commentateurs) indiens de conclure la présentation d'une règle ou d'un algorithme par un exemple d'application, souvent en guise de figure, introduit par le mot *nyāsa*, littéralement »on pose«, »on écrit«, »on trace«—en effet, opérations et figures étaient

---

[18] D'autres propositions emploient même des formules du style »fais donc selon ce qui précède sur le quatrième cas d'*al-ǧabr*«. Le présent traité est donc écrit comme pièce-compagne à une introduction à *al-ǧabr* similaire à celle d'al-Khwārizmī (mais probablement pas identique à celle-là, puisque le mot *muqābalah* semble être employé de manière différente, cf. note 24).

[19] Éd. Busard 1968: 87.

[20] Gérard a dû remarquer qu'Abū Bakr utilise le terme de manière très spécifique; ceci doit être la raison pour laquelle il le traduit *aliabra* et non, comme d'habitude (et comme il le fait lui-même en d'autres occasions) *algebra*—cf. Hughes (éd.) 1986: 233.

[21] Éd. Clagett 1984: 599.

tracées sur le sol[22]; cette application ou figure fonctionne alors comme démonstration heuristique ou explication. Du moins dans ce fragment Gérardien, la traduction »voici« semble dont adéquate, puisque le mot arabe employé par Abū Bakr à dû couvrir l'utilisation dans les textes mathématiques du mot *nyāsa*, mais en même temps a pu suggérer le mot latin *intellige*, ce qu'une traduction plus littérale du sanscrit à l'arabe n'aurait pas fait.

Naturellement, dans le *Liber mensurationum*, on pourrait encore lire la remarque simplement comme »comprends!«. On se demanderait pourtant alors ce qu'il y aurait à comprendre: comme il se présente à nous, le texte ne décrit apparemment qu'une séquence de pas de calcul ou une prescription d'un algorithme aussi peu compréhensible que les algorithmes présentés par al-Khwārizmī. Finalement, »intellige« revient souvent dans les autres problèmes, mais toujours après la description de la première méthode et jamais dans la partie »selon *al-ǧabr*«[23]. Il paraît ainsi naturel de comprendre l'*intellige* comme dans le texte parallèle et de conclure que le traité original a comporté des figures là où la traduction (et, il faut croire, le manuscrit utilisé par Gérard) n'en conserve que les références dans le vide (des exemples numériques comme on en trouve dans les textes indiens sont exclus, puisque le texte en consiste déjà; de toute façon, ce qui est suggéré est la présence du même mot *arabe* dans

[22] Guy Mazars, communication personnelle. Des exemples concernant précisément la construction de polygones réguliers se trouvent dans la *Līlāvatī* de Bhāskara (édition sanscrite Banerji 1893: appendice, 87-91; dans sa traduction anglaise (1817: 94f), Colebrooke traduit simplement comme »see«). D'autres exemples concernant précisément l'interprétation géométrique des identités algébriques se trouvent dans le *Bīǧagaṇita* (trad. Colebrooke 1817: 222-225).

[23] A la fin de la proposition 50 on pourrait soupçonner une exception à cette règle. En fait, elle finit par la phrase »intellige ergo et invenies«, »comprends donc et tu trouveras«. Mais si on regarde ce qui se passe dans le calcul, on découvre que tout dans cette proposition est pure parodie. La proposition 49 bâtit déjà sur le fait que tout triangle rectangle où les côtés forment une série arithmétique est proportionnel au triangle 3-4-5. La proposition 50 nous raconte que dans un tel triangle l'hypoténuse égale 10 et tout devrait être clair. Au lieu de cela, pourtant, viennent des calculs absolument fous et délibérément opaques; vraiment, »comprenne qui peut!«

le texte d'Abū Bakr—il n'y a aucune raison de croire que ce mot n'apparaîtrait que dans des textes dérivés du sanscrit ou discutant les méthodes indiennes). Ces figures appartiendraient alors à la première méthode; le support géométrique serait ce qui distinguerait cette méthode de la méthode numérique d'*al-ǧabr*.

La troisième proposition n'est donc pas la seule à comporter deux différentes solutions, qui parfois sont numériquement identiques (comme dans la cas cité) et parfois diffèrent. Pour illustrer cette dernière possibilité nous pouvons considérer deux exemples pris dans le chapitre sur les »quadrilatères plus longs d'un côté«. D'abord la proposition 29:

> Et s'il t'aura dit: J'ai additionné les deux côtés et ce qui en advint fut 14 et un côté excède l'autre par 2; combien est donc chaque côté?
>
> Le mode pour trouver ceci sera que tu ajoutes 2 au 14 et ce qui en advient sera 16, dont tu prends la moitié, qui est 8; c'est le côté long; tandis que si tu veux le plus court, tu le trouveras par cette méthode: Enlève 2 de 14 et prend la moitié {...} et ce sera le côté court.
>
> D'autre part, le mode selon *al-ǧabr* est que tu poses le côté court comme chose et le long comme chose et 2 parce que sa parole fut »excède l'autre par 2«, additionne-les donc et opposeles à 14[24]. Ce qui en revient [après la solution de l'équation] sera le côté court. Enlève-le donc de 14 et il restera le long.[25]

Avant de continuer on peut observer que ce problème est du premier degré; puisqu'il possède une solution »selon *al-ǧabr*«, il semble que cette discipline ne soit pas restreinte au deuxième degré: *al-ǧabr* est tout ce qui se traite par *choses*, *trésors* et *racines*.

---

[24] Évidemment, le verbe arabe doit être *qabila*, dont est dérivé *muqābalah*. Le texte présent est donc un des exemples d'usages »aberrants« de ce mot—en fait, probablement, de son usage primitif (une raison de plus de ne pas attribuer au traité une date tardive): »Opposer« la somme des côtés à 14 veut dire former l'équation »longueur+largeur=14«.

[25] Éd. Busard 1968: 92.

Comme deuxième exemple, nous pouvons citer la proposition 43:

> Mais s'il t'aura dit: : J'ai additionné ses 4 côtés et son aire et ce qui en advint fut 76 et l'un des côtés excède l'autre par 2; combien est donc chaque côté?
>
> Le mode pour trouver cela sera que tu multiplies ce dont l'un côté augmente l'autre, toujours [c'est-à-dire indépendamment de la valeur de l'augmentation] par 2 et ce qui en advient sera 4. Enlève ceci de 76 et 72 resteront. Additionne le nombre des côtés du quadrangle, qui est 4, et ajoutes-y l'augmentation d'un côté sur l'autre et ce qui en advient sera 6. Prends-en la moitié qui est 3 et multiplie-le avec lui-même, dont advient 9. Ajoute-le à 72, dont advient 81. Prends la racine de cela, qui est 9, et enlèves-en la moitié des 6 qui est 3 et il restera le côté court qui est 6. Ajoute-lui 2 et le côté long sera 8. Voici!
>
> Pourtant, le mode pour trouver la même chose selon *al-ǧabr* est que tu poses le côté court comme chose. Alors le côté long sera chose et 2: multiplie donc la chose avec la chose et 2 et l'aire sera un trésor et 2 choses. Après, additionne les côtés du quadrilatère, qui sont 4 et 4 choses; ajoute-les au trésor et 2 choses et ce qui en advient sera un trésor et 6 choses et 4, qui égaleront 76; enlève donc 4 de 76 et 72 resteront qui égaleront un trésor et 6 choses. Fais donc selon ce qui précède sur le quatrième cas d'*al-ǧabr*.[26]

La solution selon *al-ǧabr* est facile à suivre et illumine bien les raisons du succès de cette technique. D'autre part, les pas numériques de la première méthode sont assez incompréhensibles (en dépit du fameux *intellige*); ce qui s'y passe demande une clarification, par exemple par algèbre symbolique (le côté long est désigné x, le côté court y):

$$xy+2x+2y = 76 \;,\; x\text{-}y = d \;,\; d = 2$$

Remplaçant donc x par y+2 nous trouvons

$$xy+4y+2d = xy+4y+4 = 76$$

ou

[26] Éd. Busard 1968: 95f.

$$xy+4y = 76-4 = 72$$

ou encore

$$(x+4)y = 72$$

En introduisant $X = x+4$ nous avons par conséquent réduit le problème au problème

$$Xy = 72,\ X-y = 4+2 = 6,$$

qui est résolu selon une méthode bien connue dans les mathématiques paléobabyloniennes:

$$(X-y)/2 = 6/2 = 3;\ [(X+y)/2]^2 = Xy+[(X-y)/2]^2 = 72+3^2 = 81;$$
$$(X+y)/2 = \sqrt{81} = 9,\ y = (x+y)/2-(x-y)/2 = 9-3 = 6.$$

III. »L'algèbre« babylonienne

L'emploi de cette méthode caractéristique de »l'algèbre« paléobabylonienne[27] n'est pas la seule trace d'un rapport étonnant entre cette très vieille discipline et la méthode de base d'Abū Bakr—que nous pouvons appeler »algèbre d'arpentage« pour souligner à la fois son caractère algébrique[28] et le fait qu'elle est distincte de »l'algèbre d'*al-*

[27] L'époque dite »paléobabylonienne« recouvre la période de 2000 à 1600 avant J.-C. (chronologie »moyenne«); le règne de Hammurapi se situe au XVIII^{e} siècle. La plupart des textes mathématiques semblent appartenir à la dernière moitié de l'époque.

[28] Je ne discuterai pas ici dans quelle mesure ce »caractère algébrique« justifie qu'on parle vraiment d'une *algèbre*. Sur ce sujet, je renvoie aux considérations correspondantes dans mon [1989], où je discute plus à fond si »l'algèbre paléobabylonienne« est une vraie *algèbre* ou seulement une technique faisant usage de *modes de pensée algébriques*.

ǧabr«. Avant d'approcher cette question en profondeur, il serait pourtant utile de présenter »l'algèbre« paléobabylonienne elle-même d'une manière plus fidèle à son propre caractère que ne le font la plupart des introductions générales à l'histoire des mathématiques. Regardons d'abord un texte bref:

> La surface et ma rencontre j'ai additionné: $^3/_4$.
> 1 le forjet tu poses.
> La moitié de 1 tu brises, $^1/_2$ et $^1/_2$ tu fais se tenir,
> $^1/_4$ à $^3/_4$ tu ajoutes: 1 fait 1 équilatéral.
> $^1/_2$ que tu as fait tenir, du corps de 1 tu arraches:
> $^1/_2$ est la rencontre.[29]

Cette traduction est assez différente des traductions courantes[30]. Elle est fondée sur une étude comparée et approfondie du vocabulaire, des méthodes et de la structure conceptuelle des textes paléobabyloniens dites »algébriques«, dont je n'expliquerai ici ni les méthodes ni les résultats généraux en détail[31]. Ce qui importe ici est de savoir que le texte décrit une procédure géométrique, ainsi que le sens et les rapports mutuels des termes employés.

Une »rencontre« (*mitḫartum*), d'abord, est la rencontre de quatre lignes égales comme les côtés d'un carré. Le mot »rencontre« signifie à la fois la longueur de chacune de ces lignes et la configuration géométrique; en d'autres termes, le carré géométrique est identifié numériquement à ce paramètre caractéristique qu'est la longueur du côté[32].

---

[29] BM 13901 #1, éd. MKT III, 1; cf. traduction et discussion dans mon [1990, section V.2]. Il faut remarquer que les nombres du texte (qui sont écrits dans le système sexagésimal de position) ont été impitoyablement modernisés; la manière par laquelle les Babyloniens écrivaient leurs nombres n'a aucune importance pour la présente discussion.

[30] Neugebauer dans MKT III, 5f; Thureau-Dangin dans TMB, 1.

[31] L'étude complète est décrite dans mon [1990]; un exposé moins spécialisé se trouve dans mon [1989].

[32] Cette identification n'est pas plus étonnante que notre propre identification du carré avec cet autre paramètre caractéristique qu'est son aire. Pour nous, le carré *est* son aire et *possède* un côté; pour un Babylonien, le carré *est* son côté et *possède* une

La »surface« (*eqlum*, littéralement »champ«) est évidemment l'aire contenue par la figure.

Ensuite il y a les opérations. Notre petit texte nous présente deux différentes opérations »additives«. L'une, »additionner« (*kamārum*) doit être une vraie addition arithmétique, puisqu'elle peut s'appliquer à des nombres sans considération de leur signification (ici, les nombres mesurant une surface et une longueur sont additionnés). Elle est symétrique (les deux nombres à additionner sont toujours liés par un »et«), et elle fait disparaître les deux composantes dans la somme. L'autre, »ajouter« (*waṣābum*), est concrète; elle n'additionne pas des nombres abstraits, mais des grandeurs (des grandeurs mesurables, bien sûr, ce qui la fait tout de même *correspondre* à une addition arithmétique). Les deux grandeurs ne sont pas traitées de manière symétrique, puisque l'opération conserve »l'identité« d'une d'elle, tandis que l'autre lui est ajoutée. Celui pour qui cela n'a aucun sens n'a qu'à penser à son compte bancaire. A l'expiration de l'année, les intérêts y sont ajoutés, ce qui ne change pas l'identité du compte, qui restera *son* capital; seulement, son montant est devenu un peu plus grand (en fait, *intérêts* en babylonien se dit *ṣiptum*, qui est dérivé de *waṣābum*).

»Briser« (*ḫēpum*) veut dire diviser en deux, mais seulement quand les deux parties sont des »moitiés naturelles« ou coutumières (*bāmtum*)—par exemple une des deux moitiés de la base d'un triangle qui est *toujours* multipliée par la hauteur quand on veut trouver l'aire. »Briser« est une opération strictement distincte de la multiplication par $^1/_2$.

»Faire se tenir« (*šutākulum*—la traduction est assez incertaine; il se

---

aire.

En conséquence de l'interprétation traditionnelle et purement numérique de ces textes, on l'a considéré comme énigmatique et l'on a beaucoup discuté sur le fait présumé que les Babyloniens ne distinguaient pas le carré et la racine carrée. Comme on le voit, il n'y a plus d'énigme quand le *mitḫartum* est compris comme carré *géométrique*, seulement une conceptualisation différente de la nôtre. La même chose vaut, d'ailleurs, pour l'énigme analogue offerte par l'emploi du mot grec δύναμις comme terme mathématique (voir mon [1990b]).

peut qu'on doive traduire »faire se dévorer«) est d'habitude compris comme »multiplier«. En fait, »faire que *a* et *b* se tiennent« signifie »construire un rectangle à côtés *a* et *b*«. Mais puisque les Babyloniens ne s'occupent que des droites mesurables, construire un rectangle implique toujours que son aire sera calculée; bien qu'elle-même une opération *de construction*, l'opération *implique* donc une multiplication dont le résultat est normalement donné sans explication supplémentaire, ce qui est aussi le cas ici (plus bas nous verrons un exemple de mention séparée de l'opération arithmétique).

Que »*A* fait *b* équilatéral« (*A*-e íb-si$_8$ *b*) veut dire, arithmétiquement, que $b=\sqrt{A}$, et pour un Babylonien que l'aire *A* formée en carré aura le côté *b*. »Arracher« (*nasāḫum*), est finalement une soustraction concrète—il s'agit en fait de l'inversion de l'opération d'»ajouter«. Comme celle-là, elle conserve donc »l'identité« de l'entité à laquelle une partie est arrachée, tout en la changeant quantitativement.

Enfin, il y a trois termes qui ne correspondent à aucune opération arithmétique et qui, dans l'interprétation consacrée, ont toujours été regardés comme problématiques. D'abord il y a le »forjet«. Le mot babylonien est *wāṣītum*, littéralement quelque chose qui sort ou saille. Ici le mot est employé pour dénoter la largeur *1* qui, quand on la pose de façon à saillir orthogonalement d'un segment de longueur *L*, produit un rectangle de l'aire $1\ \ L=L$—ce qui correspond bien à l'utilisation du mot dans la terminologie architecturale au sens de »forjet«. L'emploi du terme »poser« (*šakānum*) dans le texte présent est alors évidente; en général, il faut le dire, le sens du mot, même dans les textes mathématiques, est assez diffus et il semble pouvoir désigner tout processus où quelque chose est marqué ou noté matériellement (la mémorisation d'un résultat intermédiaire est, d'autre part, imposée par la phrase »que ta tête retienne«).

Reste le »corps« (*libbum*, littéralement »coeur« ou »entrailles«). L'examen d'un grand nombre de textes montre que l'on peut »ajouter au corps« ou »arracher du corps« d'une surface aussi bien qu'y »ajouter« ou en »arracher« simplement. Mais, tandis qu'on peut aussi »élever«

la surface à 3 coudées (ce qui veut dire calculer le volume d'un parallélépipède avec la surface en question comme base et une hauteur de 3 coudées), jamais on n'»élève au corps de« quelque chose. Le »corps« n'intervient donc que quand la métaphore a un sens dans l'interprétation géométrique.

Le texte décrit donc d'abord une transformation de la donnée originale concernant la somme arithmétique des deux mesures en problème géométrique: Poser un forjet de *1* au côté du carré en fait un rectangle avec une aire mesurée par la même somme. $^3/_4$ représente donc un rectangle avec une largeur égale à la »rencontre« (disons x) et une longueur égale à $x+1$. Ce rectangle est transformé en gnomon et le reste ressemble exactement à la deuxième des deux démonstrations citées d'al-Khwārizmī:

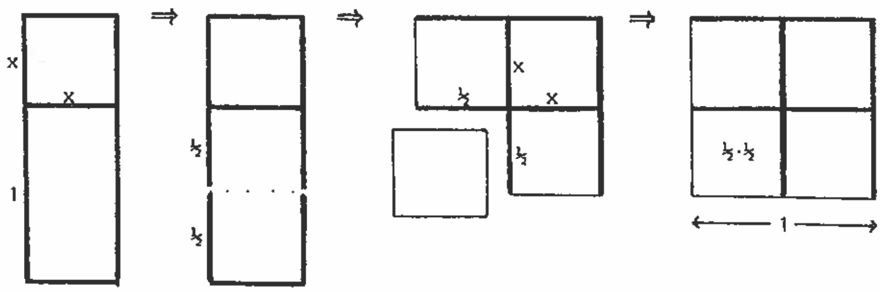

FIGURE 3

Ce problème simple est le premier d'une série de 24 problèmes sur les carrés contenus dans la même tablette, présentés en progression assez systématique du simple vers le compliqué. Le deuxième problème est de type x^2-x=S, le troisième de type ax^2+bx=S. Ensuite, le niveau augmente graduellement. Enfin, après bien des problèmes complexes à plusieurs inconnues, vient comme numéro 23 un problème très simple:

Une surface. La surface et les quatre fronts j'ai additionnés: $^{25}/_{36}$.
4, les quatre fronts, tu inscris. L'inverse de 4 est $^{1}/_{4}$.
$^{1}/_{4}$ tu élèves à $^{25}/_{36}$. $^{25}/_{144}$ tu inscris.
1, le forjet, tu ajoutes: $1^{25}/_{144}$ fait $1^{1}/_{12}$ équilatéral.
1, le forjet que tu as ajouté, tu arraches: $^{1}/_{12}$ tu répètes jusqu'à deux fois.
$^{1}/_{6}$ se rencontre.[33]

La plupart des opérations nous sont déjà familières; deux, pourtant, sont nouvelles: »Élever« et »répéter«. Également nouveau est le mot »front«. Comme mentionné ci-dessus, »élever« (*našûm*) dénote la multiplication par une hauteur par laquelle une aire est transformée en volume; il est même probable que cela explique l'étymologie du mot comme terme mathématique. Sa sphère d'application, toutefois, est beaucoup plus vaste. L'aire d'un triangle et d'un trapèze, par exemple, sont calculées par »élévation« du mi-»front« ou du »front«-moyen à la longueur; de plus, toute opération de proportionnalité implique une élévation; la »division« au moyen d'une multiplication avec l'inverse du nombre diviseur est finalement désignée de cette manière. Tout compte fait, le mot peut être expliqué comme *calcul d'une valeur concrète par multiplication*. L'opération d'»élévation« est donc différente aussi bien de la quasi-multiplication de »faire se tenir« que du terme a-rà, dérivé du verbe »aller« et traduisible comme »pas de«, employé dans les tables de multiplication et donc pour des vraies multiplications arithmétiques d'un nombre par un nombre.

»Répéter« (*eṣēpum*) est une autre (quasi-)multiplication et, en fait, la dernière opération multiplicative. Elle désigne une répétition (visuellement saisissable) d'une entité concrète, ce qui implique naturellement que le nombre mesurant l'entité sera multiplié; l'explication géométrique du texte nous montrera un exemple typique de l'emploi du terme.

»Front« (*pūtum*) désigne (dans l'arpentage) le côté court d'un champ,

---

[33] BM 13901 #23, éd. MKT III, 4f; cf. traduction et discussion dans mon [1990, section V.4].

celui qui fait front au canal d'irrigation. Dans les textes mathématiques, son équivalent sumérien (sag) est employé pour la largeur d'un rectangle plus abstrait, mais jamais le mot babylonien lui-même. Son apparition ici démontre donc que le mot »surface« devrait en réalité être lu dans son sens littéral, comme »champ«.

Le problème concerne donc un champ carré[34], dont la somme de l'aire et des nombres mesurant les quatre côtés est donnée comme $^{25}/_{36}$ (l'unité, le nindan, égale approximativement 6 m). La succession des opérations peut être suivie sur cette séquence de figures:

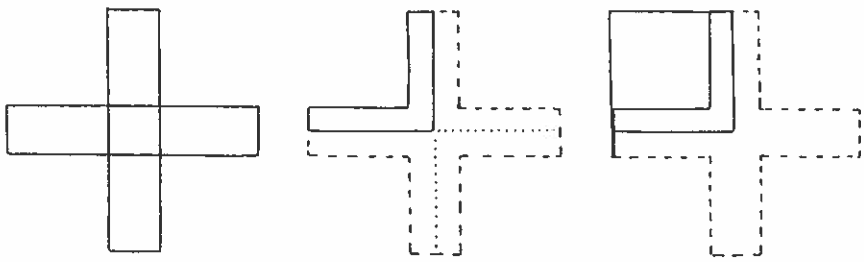

FIGURE 4

D'abord, la somme est représentée par le champ carré cerné par quatre rectangles à largeur égale au front et longueur 1. Deuxièmement, l'aire de cette figure est multipliée par $^{1}/_{4}$, ce qui correspond à la prise d'un

[34] Que le champ est un carré n'est pas dit explicitement au début. Qu'il le soit réellement résulte d'abord du fait que le champ possède quatre fronts—s'il était rectangulaire, il posséderait deux fronts et deux longueurs et, s'il était irrégulier, il posséderait un front supérieur et un front inférieur et une longueur supérieure et une longueur inférieure. La dernière ligne, en plus, le dit aussi, en utilisant l'expression »se confronter«.

quart de la figure, c'est-à-dire d'un gnomon. Ce gnomon est complété en carré d'une manière remarquable. Un mathématicien moderne ajouterait 1^2, ce qui correspond bien à ce qui se passe dans d'autres problèmes de la même tablette. Ici, pourtant, c'est le forjet lui-même qui est ajouté. Nous avons déjà vu que la »rencontre«, numériquement identique au côté du carré, désigne la figure complète. De même, le forjet représente le carré manquant, évidemment *comme figure* (comme nombre, il représente son côté). Ce qui est ajouté est donc *la figure* et non pas le nombre mesurant son aire. Le carré complété a donc une aire de $1\,{}^{25}/_{144}={}^{169}/_{144}$ et, en conséquence, un côté de ${}^{13}/_{12}=1\,{}^{1}/_{12}$. Pour retrouver le demi-front, le »forjet que tu as ajouté« est encore arraché, ce qui souligne une fois de plus que la figure carrée ajoutée comme complément est identique à son côté, qui est de fait la grandeur arrachée. Finalement, il en résulte le front lui-même quand le demi-front est »répété«, c'est-à-dire combiné avec son image de miroir.

D'après sa structure mathématique, le problème est du même type que le numéro trois de la tablette (et même plus simple). La solution, pourtant, est obtenue de manière différente. Différente aussi est la formule employée, qui selon la manière du numéro deux aurait dû être »J'ai additionné la surface et mes quatre confrontations«. L'emplacement entre les problèmes complexes et la formule aberrante aussi bien que la méthode insolite ont toujours été regardés comme mystérieux—Neugebauer a même proposé que le texte serait corrompu et ne donnerait de sens mathématique que par hasard[35]. Pris ensemble, pourtant, les trois mystères semblent se résoudre mutuellement. La formule (»Un champ. [...] les quatre fronts [...]«) semble indiquer que le problème n'est pas compris comme une équation type. Il appartient plutôt au stock des énigmes mathématiques professionnelles des arpenteurs. Qu'une énigme soit résolue d'une manière surprenante et élégante n'est naturellement que bienséant; il est tout aussi naturel, d'autre part, qu'elle soit alors placée entre les problèmes complexes auxquels les techniques de

[35] MKT III, 14.

base peuvent être appliqués.

La ressemblance entre le problème présent et la première démonstration d'al-Khwārizmī n'a pas besoin d'être expliquée. Ce qu'il faut peut-être signaler c'est l'intérêt partagé avec Abū Bakr pour *les quatre côtés* d'un quadrilatère—rien que dans le chapitre du *Liber mensurationum* sur les carrés, sept problèmes les concernent (les numéros 4, 6, 7, 8, 9,12 et 14), et dans le chapitre sur les rectangles plusieurs (dont le numéro 43 cité plus haut) le font aussi. Cette observation s'accorde bien avec le rôle des problèmes de ce recueil comme énigmes d'arpenteurs. Évidemment, si un arpenteur (ou quelqu'un d'autre dont la motivation n'est pas cet esprit de système qui caractérise l'instruction mathématique des institutions scolaires) doit formuler une énigme combinant l'aire et les côtés d'un carré, les premières possibilités qui lui viendront à l'esprit seront *l'aire et le côté* et *l'aire et les côtés.*

Notre troisième exemple vient d'une autre tablette et concerne un rectangle:

> Longueur, largeur. La longueur et la largeur j'ai fait se tenir: Une surface j'ai bâtie.
> J'en ai fait le tour. Ce par quoi la longueur excède la largeur j'ai ajouté au corps de la surface: 183.
> Je suis retourné. La longueur et la largeur j'ai additionnées: 27.
> Longueur, largeur et surface sont quoi?

27	183	les additionnés
15	longueur	180 surface
12	largeur	

> Toi, pour ta méthode, 27, les additionnés de longueur et largeur, ajoute au corps de 183: 210.
> 2 à 27 ajoute: 29.
> Sa moitié, celle de 29, tu brises: $14^1/_2$.
> <$14^1/_2$ et $14^1/_2$ tu fais se tenir>[36].

[36] Ce complètement d'une ellipse suit des passages parallèles de la même tablette, dont l'une se trouve huit lignes plus bas dans la présente traduction.

$14^1/_2$ pas de $14^1/_2$, $210^1/_4$.
Du corps de $210^1/_4$, 210 tu arraches: $^1/_4$ est le reste.
$^1/_4$ fait $^1/_2$ équilatéral.
$^1/_2$ au premier $14^1/_2$ ajoute: 15 est la longueur.
$^1/_2$ du second $14^1/_2$ coupe: 14 est la largeur..
2 que tu as ajouté à 27, de 14, la largeur, tu arraches:
12 est la vraie largeur.
15, la longueur, 12 la largeur j'ai fait se tenir:
15 pas de 12, 180 est la surface.
15, la longueur, excède 12, la largeur, par quoi?
Il l'excède par 3. 3 au corps de 180, la surface, ajoute.
183 est la surface.[37]

Du point de vue des opérations, ce texte ne nous apporte pas beaucoup de neuf. On peut observer que l'expression »ce par quoi *A* excède *B*« revient dans beaucoup de textes—elle désigne une »soustraction par comparaison«, donc une soustraction dont le résultat ne partage pas l'identité du diminuendum; on remarque aussi qu'elle correspond à l'expression utilisée par Abū Bakr, »ce dont *A* augmente *B*«. »Couper *B* de *A*« est, d'autre part, une soustraction qui conserve l'identité, précisément comme fait »arracher«; les deux mots peuvent être regardés comme de simples synonymes, entre lesquels les Babyloniens ont choisi selon leurs connotations et valeurs métaphoriques (on ne »coupe« que des entités linéaires).

Les mots »longueur, largeur« au commencement nous informent que le problème concerne une surface déterminée par *une* longueur et *une* largeur—c'est-à-dire un rectangle. La spécification selon laquelle le procès de »faire que se tiennent« la longueur et la largeur entraîne qu'une surface est »bâtie« démontre que l'opération en question est vraiment une *construction* et non pas une multiplication arithmétique (une multiplication *présupposant* une opération de bâtissement serait mentionnée *après* celle-là). Plus remarquable encore est la remarque selon laquelle celui qui a jalonné la surface en fait la ronde; il s'agit

[37] AO 8862 #1, éd. MKT I, 108f.

vraiment d'une surface dans le terrain—à savoir d'un »champ«. Une fois encore, le problème prétend traiter de la pratique de l'arpentage, tout en appartenant en réalité dans la catégorie »brillante« des énigmes.

La méthode peut paraître quelque peu opaque, mais s'explique symboliquement comme suit: Des données

$$xy+(x-y) = 183\ ,\ x+y = 27$$

suivent par addition et l'introduction de $Y = y+2$

$$xy+(x-y)+(x+y) = xy+2x = x(y+2) = xY = 210,$$

et d'autre part

$$x+Y = (x+y)+2 = 27+2 = 29, \text{ donc } (x+Y)/2 = 14^1/_2,$$

et donc

$$[(x-Y)/2]^2 = [(x+Y)/2]^2-xY = 210^1/_4-210 = {}^1/_4,\ (x-Y)/2 = {}^1/_2.$$

Ceci nous donne

$$x = [(x+Y)/2]+[(x-Y)/2] = 14^1/_2+{}^1/_2 = 15$$

et

$$Y = [(x+Y)/2]-[(x-Y)/2] = 14^1/_2-{}^1/_2 = 14,$$

dont il résulte finalement

$$y = Y-2 = 12.$$

Mis à part le remplacement de $x+y$ par $x-y$ (et vice versa) dans les données, le problème est strictement analogue au dernier problème cité ci-dessus d'Abû Bakr. Plus haut déjà il a été dit qu'Abū Bakr emploie une méthode paléobabylonienne caractéristique pour résoudre ce problème, soit le calcul par demi-somme et demi-différence. En fait, la ressemblance va plus loin, incluant l'introduction d'une »variable auxiliaire« X ou Y, dont le présent texte parle explicitement comme une »largeur«, différente bien sûr de la »vraie largeur«. Qu'Y soit réellement une largeur se verra sur la figure suivante, qui nous montrera aussi la situation d'un point de vue d'arpenteur:

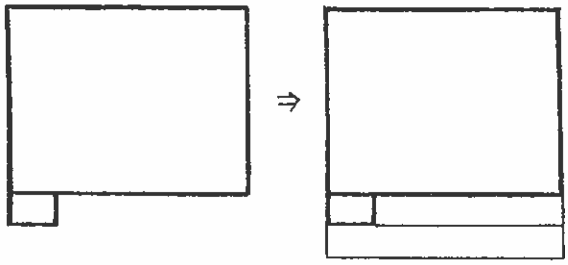

FIGURE 5

D'abord, le rectangle est bâti et »ce par quoi la longueur excède la largeur« est »ajouté«—ce qui présuppose qu'il est pourvu d'une largeur *1* et ce qui donne une surface totale égale à *183*. Au pas suivant, »les additionnés de longueur et largeur« (le pluriel est indubitable dans le texte Babylonien) y sont ajoutés. Comme on le voit, le résultat est un nouveau rectangle d'aire *210*, dont la nouvelle largeur (*Y*) excède la largeur initiale par 2 et dont la somme des deux côtés est *27+2 = 29*.

Le rectangle à aire connue (ici *210*) avec la somme des deux côtés connue (ici *29*) est un problème type de l'»algèbre« paléobabylonienne. Sa solution peut être suivie dans la figure suivante, tirée en fait de la démonstration d'al-Khwārizmī du cas »trésor et nombres égalent racines«[38]:

[38] Ed., trad. Rosen 1831: 18.

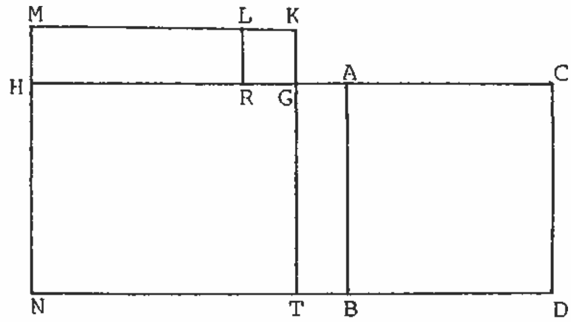

FIGURE 6

Le rectangle inconnu est représenté par AN, dont l'aire est *210*. Si BD est rendu égal à AB (Y), il s'ensuit que ND égalera *29* ($=x+Y$). Nous divisons ce segment en deux parties égales (NT et TD) et les faisons »se tenir«, ce qui produit le carré NK, dont l'aire sera $14^1/_2{}^2=210^1/_4$ ($=[(x+Y)/2]^2$). Si HR est rendu égal à AB ($=Y$), on verra à l'aide d'un peu de comptabilité élémentaire (HM, comme GA, égale $(x-Y)/2$) que MR égale GB et donc que l'aire du gnomon MLRGTN égale *210*, qui est arraché des $210^1/_4$ représentant NK. Le reste (dont l'aire sera $^1/_4$) sera le carré RK, dont le côté égale $(x-Y)/2 = {}^1/_2$. Cette demi-différence est ajoutée »au premier $14^1/_2$« (NT), ce qui nous donne la longueur ($x=15$), et ensuite coupé »du second $14^1/_2$« (MN), ce qui donne la largeur ($Y=14$).

La même figure aurait pu être reprise au traité d'ibn Turk[39]. Il semble bien, finalement, que la figure à laquelle se réfère Abū Bakr par son »voici!« soit similaire[40]. Somme toute, il y a de bonnes raisons de penser

[39] Trad. Sayılı 1962: 164.

[40] Bien entendu, elle doit être différente dans le détail pour la simple raison qu'il part d'un rectangle où l'aire et *la différence* entre les côtés sont connues; selon toute vraisemblance, elle correspond précisément aux figures 2 et 3. Le numéro 58 du *Liber mensurationum*, pourtant, part de l'aire (plus précisément, de l'aire du losange inscrit dans le rectangle) et de la somme des côtés (égale dans ce cas à la somme des

que les savants musulmans bâtissent sur une tradition née durant l'âge du bronze babylonien.

D'autres observations d'ordre stylistique et linguistique étaient cette hypothèse. D'abord, l'organisation »rhétoricienne« des problèmes. Comme nous l'avons vu, les problèmes d'Abū Bakr commencent »Si quelqu'un t'aura dit«. Ce que ce »quelqu'un« a dit est dit à la première personne singulier parfait—avec une seule exception: Si la longueur excède la largeur, ceci est expliqué à la troisième personne singulier présent, comme un fait neutre et non pas comme quelque chose »qu'il« a fait.

Alors vient une référence explicite à la méthode, qui est enfin expliquée comme quelque chose que »tu« dois faire, à l'impératif alternant avec la deuxième personne singulier du présent. Parfois, une étape est justifiée par une référence à l'énoncé employant la formule »parce que sa parole fut« (*quoniam sermo eius fuit*). Parfois aussi, un résultat intermédiaire qui ne correspond pas directement à une entité géométrique doit être »retenu en mémoire«.

Une partie de ces caractéristiques se retrouvent dans les problèmes paléobabyloniens cités ici. Ceux qui manquent se trouvent tous dans d'autres textes, en particulier la référence au »quelqu'un« introduisant l'énoncé. A elle seule, l'alternance entre la première et la deuxième personne pourrait être expliquée comme un reflet de la situation didactique; la même chose pourrait peut-être se dire de l'alternance entre présent et parfait. Si les deux alternances sont considérées ensemble et combinées avec les autres caractéristiques stylistiques beaucoup plus singulières, toute explication par la situation didactique et par le hasard devient extrêmement invraisemblable.

Une particularité des textes paléobabyloniens est la multiplicité des opérations distinctes. Dans leurs grandes lignes, les mêmes distinctions sont respectées par Abū Bakr concernant les opérations additives et

---

diagonales du losange) et semble suivre exactement la même voie géométrique que notre problème babylonien). Cf. aussi plus bas le numéro 9.

soustractives. Il est plus difficile de voir ce qu'il en est des opérations multiplicatives, parce que les opérations correspondant à »élever« et »pas de« sont absentes de son traité. Il y a des indices, pourtant, qu'il distingue quelque chose de similaire à la »répétition« concrète paléo-babylonienne; d'abord, Abū Bakr emploie »doubler« là où un texte babylonien aurait »répété jusqu'à deux«—mais plus remarquable est une construction double au numéro 57, où »quadrupler« est suivi par une explication numérique (»multiplication« par 4), précisément comme dans le problème babylonien où le résultat numérique d'un procès de »faire *a* et *b* se tenir« est trouvé comme »*a* pas de *b*«.

IV. Une tradition

A en croire le mystérieux »voici!« (*intellige*), le traité d'Abū Bakr semble présupposer une compréhension heuristique basée sur des figures géométriques. Beaucoup de problèmes sont du même type que les problèmes paléobabyloniens, y compris les types assez singuliers concernant l'aire et les quatre côtés d'une figure et la somme de l'aire et d'une combinaison linéaire des côtés d'un rectangle. La méthode de base coïncide avec les méthodes particulières et caractéristiques de l'»algèbre« paléobabylonienne, par exemple l'emploi d'une demi-somme et d'une demi-différence et le »changement de variable«. La distinction entre opérations qui diffèrent dans une interprétation géométrique, mais pas dans une interprétation arithmétique est respectée. La structure »rhétoricienne« coïncide, finalement, avec celle des textes mathématiques babyloniens dans les détails de grammaire et des expressions fixes. Somme toute, il est donc plus que difficile de rejeter l'idée que le traité d'Abū Bakr (ou du moins une partie de sa substance, puisqu'il contient d'autres matières) appartient à »une tradition née durant l'âge du bronze babylonien«, comme il a été suggéré plus haut. Puisqu'il s'agit d'un traité sur l'arpentage, il faut croire que la tradition a été transmise par le milieu des praticiens-géomètres—arpenteurs, architectes et maîtres maçons—le même milieu qui semble avoir inspiré plusieurs des problèmes babyloniens cités plus haut[41]. Comme presque tous les milieux de praticiens antiques et médiévaux, outre celui des scribes, celui-ci ne nous a laissé aucune source écrite sur ses méthodes, bien que l'existence d'un fonds de méthodes ne peut pas être mise en doute; le fait qu'une tradition a pu survivre depuis l'ère paléobabylonienne jusqu'au neuvième siècle sans avoir laissé de traces est donc moins surprenant qu'on pourrait le croire à première vue[42].

Cette conclusion peut être étayée par deux observations d'ordre différent. On peut, d'abord, signaler un autre cas frappant de continuité mathématique réunissant l'ère paléobabylonienne et le moyen-âge islamique (aussi bien que le moyen-âge latin et indien). En 952/53, un certain Abū'l-Ḥasan al-Uqlīdisī, travaillant à Damas, a écrit un traité de grande envergure sur le calcul avec les chiffres hindous. Le dernier chapitre, qui porte le titre »Doubler l'unité, soixante-quatre fois«, nous dit que

> Cela est une question posée par beaucoup de gens. Il y en a qui

[41] Il est même vraisemblable que le point de départ de »l'algèbre« méthodique des scribes babyloniens aura été les devinettes mathématiques apparaissant dans un milieu d'arpenteurs durant le troisième millénaire. Pendant l'époque paléobabylonienne ces devinettes auront alors été adoptées et systématisées dans l'école de scribes; en même temps, la tradition originale aura continué son existence extrascolaire (voir mon [1990a, section V]), survivant jusqu'à l'époque d'Abū Bakr.

[42] Il faut savoir que les textes mathématiques de l'époque basse babylonienne (l'époque seleucide) n'utilisent pas les méthodes caractéristiques partagées par Abū Bakr et les textes paléobabyloniens et ne distinguent pas différentes opérations additives, soustractives et multiplicatives (voir mon [1990, section X.2]); la tradition qui réunit Abū Bakr aux sources paléobabyloniennes ne passe donc pas par les prêtres-astrologues seleucides auteurs des textes mathématiques cunéiformes tardifs.

doublent l'unité 30 fois et d'autres qui la doublent 64 fois[43].

Environ un siècle et demi plus tôt, un recueil de problèmes de récréation (les *Propositiones ad acuendos iuvenes*) fut composé en pays franc, peut-être à l'école palatine de Charlemagne à Aix-la-Chapelle et peut-être par Alcuin. Le 13ième problème explique que

> un roi a commandé à son ministre de lever une armée de 30 villes de cette manière, qu'on conscrive de chaque ville tant d'hommes qu'on y aurait conduits. Le ministre, pourtant, est venu seul à la première ville et à la seconde avec un autre; à la troisième, maintenant, trois sont venus [avec lui]; que celui qui peut dise combien d'hommes ont été levés de ces 30 villes.[44]

Les 64 doublements, se réfèrent évidemment au »problème de l'échiquier« raconté par plusieurs auteurs arabes[45] et peut-être aussi discuté par al-Khwārizmī dans une oeuvre perdue[46]. Les 30 doublements se retrouvent plus tard chez Bhāskara, mais aussi dans des sources d'une époque beaucoup plus ancienne. Tout d'abord, un papyrus grec, provenant probablement du Haut-Empire romain mais peut-être des troisième ou quatrième siècles, calcule 30 doublements d'un montant initial de 5 drachmes[47]. Ce qui est plus intéressant encore, une tablette datant du XVIII^e siècle avant J.-C. et venant de Mari en Iraq contient le problème suivant:

> A un seul grain, 1 grain a été ajouté:
> 2 grains le premier jour,
> 4 grains le second jour,
> [...][48]

et ainsi de suite jusqu'au trentième jour. Comme chez »Alcuin«, le

---

[43] Trad. Saidan 1978: 337.

[44] Éd. Folkerts 1978: 51.

[45] Voir Wiedemann 1970: I, 442-453.

[46] Vois Sesiano 1987: 492+note 23.

[47] Voir Boayaval 1971.

[48] Éd. Soubeyran 1984: 30ff.

doublement est formulé de manière additive; comme dans le problème de l'échiquier, il s'agit de grain (et on trouve en effet dans la Babylonie des »échiquiers« à 30 cases!); et comme chez al-Uqlīdisī, Alcuin et Bhāskara et dans le papyrus grec, on double précisément 30 fois. La continuité semble être hors de doute.

L'autre observation concerne d'un »Traité sur ce qui est nécessaire concernant les constructions géométriques pour les artisans-spécialistes« écrit par Abū'l-Wafā' vers la fin du dixième siècle. A propos du problème qui consiste à additionner trois carrés égaux, Abū'l-Wafā' raconte avoir présenté ce problème à l'occasion d'une rencontre entre géomètres et »artisans-spécialistes« (*ṣunnaʿ*, traduisible aussi comme »praticiens«). Les géomètres, bien sûr, ont vite trouvé une solution, qui

> pourtant n'était pas du tout satisfaisante pour les artisans, parce qu'ils n'étaient pas en état de diviser ces trois carrés en pièces qui pourraient être composées de telle manière qu'il en résulte un seul carré, comme nous l'avons fait pour deux et cinq carrés. En ce qui concerne les artisans, ils ont proposé plusieurs méthodes pour le faire. Pour quelques-unes de ces méthodes des démonstrations ont été faites, tandis que d'autres se montraient fausses. Celles pour lesquelles des démonstrations n'étaient pas données étaient très près d'être correctes et celui qui voyait ces constructions les croirait vraies.[49]

Les »artisans-spécialistes« dont parle Abū'l-Wafā' ont donc pratiqué une géométrie de découpage et d'assemblage des figures, correspondant précisément à la géométrie »naïve« que nous trouvons dans l'»algèbre« paléobabylonienne, dans les démonstrations d'al-Khwārizmī et d'ibn Turk et, selon toute vraisemblance, chez Abū Bakr.

La première observation montre la possibilité d'une survie silencieuse durant les deux millénaires et demi séparant l'époque paléobabylonienne d'al-Khwārizmī[50]; la deuxième confirme la préférence des

---

[49] Trad. russe Krasnova 1966: 115.

[50] Non pas tout à fait silencieuse, il est vrai: Il y a le papyrus grec. En outre, on trouve dans le corpus Héronien et chez les agrimenseurs romains des problèmes du

géomètres pratiques pour les techniques de découpage et d'assemblage des figures.

»Découpage et assemblage« est une description assez précise des techniques employées dans »l'algèbre« et la »géométrie naïve« des Babyloniens et donc, semble-t-il, dans »l'algèbre d'arpentage« d'Abū Bakr. Peut-être est-ce aussi le nom par lequel Abū Bakr désignait lui-même cette méthode. C'est du moins une interprétation plausible d'une remarque faite dans le problème numéro 9:

> Et s'il t'aura dit: J'ai enlevé l'aire [d'un carré] de ses côtés et trois sont restés, combien est alors chacun de ses côtés?
>
> La méthode de ceci sera que tu divises en deux le nombre des côtés, ce qui sera 2, lequel tu multiplies alors par lui-même et ce qui en advient sera 4. De ceci enlève donc 3 et 1 restera; prends sa racine, qui est 1, lequel, si tu l'ajoutes à 2, donnera les trois côtés; et si tu l'enlèves de 2, 1 restera qui sera un quelconque de ses côtés, et ceci, en effet, est selon augmentation et enlèvement.
>
> D'autre part, la méthode selon *al-ǧabr* est que tu poses toujours un des côtés comme la chose, laquelle tu multiplies par elle-même [...][51]

La structure mathématique du problème coïncide (en interprétation géométrique, où il n'importe pas de savoir s'il y a une ou deux inconnues) avec celle du numéro 43: Rectangle à aire donnée et avec somme donnée des côtés[52]. La procédure peut donc être suivie sur la

---

deuxième degré tout à fait isolés, mais très proches de certains problèmes paléobabyloniens ou présents dans le *Liber mensurationum*. Par exemple, le *Geometrica* Héronien (éd. Heiberg 1912: 380 et encore 444) contient un problème où la somme du diamètre, de la périphérie et de l'aire d'un cercle est donnée; exactement le même problème se trouve dans une tablette paléobabylonienne (éd. Friberg 1981: 61).

[51] Éd. Busard 1968: 88.

[52] En interprétation d'*al-ǧabr*, évidemment, il appartient au cas »trésor et nombre égalent côtés«. Il est remarquable, pourtant, que l'énoncé du problème correspond à la formule utilisée dans les textes paléobabyloniens, »aire enlevée de côtés: nombre«. Non moins remarquable est le fait que la solution explicite aussi bien la longueur (»les trois côtés«) que la largeur (le côté) du rectangle inconnu.

figure 6, avec HC égal à 4 et le rectangle HD égal donc aux quatre côtés. Le carré inconnu est représenté par AD et le rectangle qui reste quand l'aire du carré est enlevée des quatre côtés est donc représenté par HB. L'adjonction de 1 à 2 est représenté par l'adjonction de TB à NT; elle donne NB (disons 4-x), et *dans le cas actuel* (x = 1) donc 3 ou 3x, comme on l'affirme dans le texte (l'identification s'explique facilement si l'on suppose que l'argument a été fait à partir d'une figure à proportions correctes). L'enlèvement est représenté par l'enlèvement de HM de NM et le résultat HN identique au côté.

En principe, l'»augmentation et l'enlèvement« (*augmentatio et diminutio*) pourraient être une référence au cas correspondant d'*al-ğabr*, qui est précisément celui où l'addition aussi bien que la soustraction peut donner l'inconnue, comme nous l'a déjà expliqué al-Khwārizmī. Mais si Abū Bakr avait eu l'intention de nous notifier cela, il aurait probablement dit que l'addition nous donne *aussi* une solution possible (x = 3), ou du moins il aurait rejeté cette solution comme différente de celle qui est recherchée[53]. Qui plus est, beaucoup d'autres problèmes parmi ceux qui traitent des rectangles ou des losanges (dont ceux correspondant au »quatrième cas« d'*al-ğabr* »trésor et côtés égalent nombre«) peuvent aussi être résolus par »addition [donnant le côté long ou la diagonale longue] et soustraction [donnant le côté court ou la diagonale courte]« et quelques-uns le disent directement (par exemple les numéros 57 et 58). Dans le contexte du *Liber mensurationum*, il n'y a donc rien qui lie le présent problème *spécifiquement* à »augmentatio et diminutio« et il paraît plus probable que l'expression doit être considérée comme opposée à l'*al-ğabr* de la phrase suivante. La méthode de découpage et d'assemblage géométrique naïve semble être désignée par un nom traduisible comme »assemblage et découpage«.

Si cela est bien le cas, il faut se demander quelle a été l'expression

[53] Si l'on s'en tient à la méthode géométrique, le problème de la solution double ne se pose pas; pour représenter géométriquement l'équation $x \cdot (2a-x) = b$, il faut décider d'avance si $x<a$ ou $x>a$, puisque les représentations géométriques des deux cas sont différentes.

correspondante arabe. Un candidat semble s'imposer: *al-ǧamʿ wa'l-tafrīq*[54]. Plusieurs traités sur ce sujet non identifié ont été écrits (dont l'un par al-Khwārizmī) jusqu'au commencement du dixième siècle, bien qu'aucun d'eux n'ait survécu. *Ǧamʿ* vient du verbe *ǧamaʿa* dont le sens originel semble être »assembler, joindre« (concrètement); *tafrīq* vient du verbe *faraqa*, »séparer, diviser, découper«. L'expression, un peu énigmatique[55], correspond donc bien à »assemblage et découpage« et pourrait bien avoir été traduite par Gérard comme »augmentatio et diminutio«.

Bien sûr, cette identification reste hypothétique. Ce qui semble être bien établi, c'est qu'une tradition »d'algèbre d'arpentage« de descendance paléobabylonienne était encore vivante et connue à l'époque d'al-Khwārizmī et d'ibn Turk et que cette tradition faisait usage de méthodes correspondant précisément (l'utilisation de l'alphabet comme nom des entités géométriques mise à part) aux démonstrations géométriques données par ces auteurs des algorithmes appartenant à *al-ǧabr*. C'est donc avec bonne raison que nous avons proposé plus haut que ces démonstrations étaient tout aussi traditionnelles qu'*al-ǧabr* lui-même. Ce qu'al-Khwārizmī et ibn Turk ont fait n'est pas de réunir l'*al-ǧabr* traditionnel et les mathématiques rigoureuses grecques—Thābit ibn Qurra l'a bien vu—mais de voir comment les différentes traditions

---

[54] Le *Liber augmenti et diminutionis* mentionné plus haut (note 8), en tout cas, n'a rien a voir avec la présente méthode.

[55] La seule trace positive du contenu des traités a été trouveé par A. S. Saidan (1987: 440): Abū Manṣūr al-Baghdādī a dit au commencement de l'onzième siècle qu'un certain problème d'arithmétique pratique est mentionné dans le traité d'al-Khwārizmī sur *al-ǧamʿ wa'l-tafrīq;* Saidan en conclut que les traités sur le sujet en question semblent avoir consisté en, ou du moins comporté des »opérations arithmétiques populaires appliquées à l'arithmétique de tous les jours, utilisant probablement l'expression des nombres par les doigts et l'échelle de 60« (»folk arithmetical problems as applied to everyday arithmetic, probably using finger-reckoning and the scale of sixty«). Étant donné le caractère éclectique du traité d'al-Khwārizmī sur *al-ǧabr*, il semble pourtant bien risqué de reconstituer le contenu total d'un traité perdu à partir d'une seule citation.

»sous-scientifiques« pourrait être synthétisées avec un résultat beaucoup plus apte à servir de base aux futurs développements que ne l'étaient l'automatisme algorithmique sans preuves ou une technique fondée seulement sur la manipulation des figures, s'ils étaient pris chacun pour soi.

Ceci laisse encore ouverte la question de l'origine d'*al-ğabr*. Il est d'usage de lui attribuer des racines babyloniennes et de proposer un passage par l'Inde. Tant qu'on n'a pas prouvé (ou seulement trouvé) une origine différente, il est évidemment difficile de réfuter l'hypothèse babylonienne; il faut savoir, pourtant, qu'elle se fonde premièrement sur une interprétation purement numérique (et donc fausse!) de »l'algèbre babylonienne« et deuxièmement sur le fait que les Babyloniens, comme les »gens d'*al-ğabr*«, s'intéressaient aux équations de deuxième degré. D'autre part, à tous les niveaux des détails, les deux disciplines diffèrent, soit en ce qui concerne le choix des problèmes-type préférés, soit dans les formules employées, soit dans les méthodes, soit dans la conceptualisation des entités concernées. S'il y a eu une route menant de l'ancienne Babylonie jusqu'à l'*al-ğabr* des praticiens pré-al-Khwārizmiens, elle a dû passer par bien d'autres contrées.

L'association indienne est mieux étayée. La métaphore »racine« (*jidhr*) pour le nombre qui multiplié par lui-même donne »le trésor« peut nous paraître naturelle, parce que nous l'avons empruntée nous-mêmes et que nous nous y sommes accoutumés; mais dans l'interprétation numérique que lui ont donnée les Arabes, elle est en fait inexplicable. L'explication présuppose une interprétation géométrique, comme »ce côté sur lequel un carré reste comme sur un pied«—et cette interprétation est bien attestée dans les mathématiques indiennes au moins depuis Āryabhaṭa. En plus, en sanscrit le mot *mūla* signifie »base« et »fondement« aussi bien que »racine d'un arbre«[56].

D'autre part, comme l'a déjà observé Léon Rodet il y a plus d'un siècle, il y a une différence frappante, aussi bien de niveau que d'ap-

[56] Voir Datta & Singh 1962: I, 169f.

proche, entre l'algèbre de mathématiciens indiens comme Āryabhaṭa et Brahmagupta et *al-ǧabr* comme nous la rencontrons chez al-Khwārizmī. De toute évidence, les praticiens-calculateurs (et même les astronomes) arabes n'ont *pas* appris leur *al-ǧabr* chez ces maîtres indiens. L'association indienne s'expliquera plutôt comme dépendance par rapport à une tradition sous-scientifique qui a *aussi* inspiré les mathématiciens indiens dans leur développement scientifique du sujet. Il est pour le moment impossible de dire s'il s'agit là d'une tradition d'origine indienne ou venant, peut-être, de Khwārezm (le pays d'origine de la famille d'al-Khwārizmī) ou d'une autre région de l'Asie centrale. Des réponses pourraient peut-être être trouvées au moyen d'analyses philologiques précises des sources indiennes.

Moins d'un siècle après la mort d'al-Khwārizmī, l'existence d'une tradition d'*al-ǧabr* plus vieille que lui semble avoir été oubliée. En ce qui concerne l'existence d'une »algèbre d'arpentage« indépendante d'*al-ǧabr*, la situation n'a pas été bien différente. Après le milieu du dixième siècle, les traités sur *al-ǧamʿ wa'l-tafrīq* ne s'écrivaient plus. Dans l'Espagne lointaine, une copie du traité d'Abū Bakr a encore pu être trouvée au douzième siècle[57]; Savasorda, écrivant au début du même siècle, conserve aussi quelques traces d'une »algèbre« aberrante dans son *Recueil sur l'arpentage*[58], comme le fait encore Léonard de Pise dans sa *Geometria practica*. Dans les deux cas, pourtant, la synthèse avec Euclide et avec la tradition post-al-Khwārizmienne est déjà si mûre que seule la connaissance du traité d'Abū Bakr nous permet de déceler ces traces. Grâce à Gérard de Crémone, »l'algèbre d'arpentage« fut transmise au Moyen-Age latin, mais sans cette technique géométrique qui était son plus

[57] Une copie assez corrompue, il faut le dire. Il n'y a pas que la présence des »voici« sans figures à voir et le mélange des différents systèmes numériques mentionnés en note 17. Parmi les autres signes de corruption textuelle on trouve, par exemple, des références »au précédent« qui en fait renvoient à des problèmes venant plus tard.

[58] Édition de la traduction latine faite par Platon de Tivoli avec traduction allemande dans Curtze 1902.

fécond aspect. Celle-là n'a été transmise qu'avec l'algèbre d'al-Khwārizmī, en forme rudimentaire, bien sûr, mais déjà accommodée au goût grécisant. Si, en fin de compte, elle va jouer un rôle durant la renaissance (ce qui est bien probable en ce qui concerne Cardan, mais qui vaut peut-être aussi pour Viète), c'est grâce au travail de synthèse d'al-Khwārizmī.

BIBLIOGRAPHIE

Baillet, J., 1892. *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm.* (Mission Archéologique Française au Caire, Mémoires 9, 1). Paris: Leroux.

Banerji, Haran Chandra (ed.), 1893. *Colebrooke's Translation of the Lîlâvatî.* With Notes [and a Sanscrit Text]. Calcutta: Thacker, Spink and Co.

Boyaval, B., 1971. "Le P. Ifao 88: Problèmes de conversion monétaire". *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik* 7, 165-168, Tafel VI.

Busard, H. L. L., 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le »Liber mensurationum« d'Abû Bekr". *Journal des Savants*, Avril-Juin 1968, 65-125.

Clagett, Marshall, 1984. *Archimedes in the Middle Ages.* Volume V. *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century.* (Memoirs of the American Philosophical Society, 157 A+B). Philadelphia: The American Philosophical Society.

Colebrooke, H. T. (ed., tr.), 1817. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara,* Translated. London: John Murray. Reprint Wiesbaden: Martin Sändig, 1973.

Curtze, Maximilian (ed.), 1902. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.* (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, vol. 12-13). Leipzig: Teubner.

Datta, Bibhutibhusan, & Avadhesh Narayan Singh, 1962. *History of Hindu Mathematics. A Source Book.* Parts I and II. Bombay: Asia Publishing House. 1st ed. Lahore: Motilal Banarsidass, 1935-38.

Folkerts, Menso, 1978. "Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 6. Abhandlung.

Friberg, Jöran, 1981. "Methods and Traditions of Babylonian Mathematics, II: An Old Babylonian Catalogue Text with Equations for Squares and Circles". *Journal of Cuneiform Studies* 33, 57-64.

Heiberg, J. L. (ed., tr.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV). Leipzig: Teubner.

Hochheim, Adolph (ed., tr.), 1878. *Kafî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik)* des Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi. I-III. Halle: Louis Nebert.

Høyrup, Jens, 1986. "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra". *Erdem* 2 (Ankara), 445-484.

Høyrup, Jens, 1987. "The Formation of »Islamic Mathematics«. Sources and Conditions". *Science in Context* 1, 281-329.

Høyrup, Jens, 1989. "Zur Frühgeschichte algebraischer Denkweisen". *Mathematische Semesterberichte* 36, 1-46.

Høyrup, Jens, 1990. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". A paraître dans *Altorientalische Forschungen* 17.

Høyrup, Jens, 1990a. "Sub-Scientific Mathematics. Observations on a Pre-Modern Phenomenon". *History of Science* 28, 63-86.

Høyrup, Jens, 1990b. "*Dýnamis* and *mitḫartum*: On Analogous Concepts in Greek and Old Babylonian Mathematics". *Historia Mathematica* 17, 201-222.

Hughes, Barnabas, O.F.M., 1986. "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's *Al-Jabr*: A Critical Edition". *Mediaeval Studies* 48, 211-263.

Krasnova, S. A. (ed., tr.), 1966. "Abu-l-Vafa al-Buzdžani, *Kniga o tom, čto neobxodimo remeslenniku iz geometričeskix postroenij*", pp. 42-140 dans A. T. Grigor'jan & A. P. Juškevič (eds), *Fiziko-matematičeskie nauki v stranax vostoka*. Sbornik statej i publikacij. Vypusk I (IV). Moskva: Izdatel'stvo »Nauka«.

Libri, Guillaume, 1838. *Histoire des mathématiques en Italie*. 4 vols. Paris, 1838-1841. Reprint Hildesheim: Georg Olms, 1967.

Luckey, Paul, 1941. "Ṯābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen". *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, 93-114.

MKT: O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-texte*. I-III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937. Reprint Berlin etc.: Springer, 1973.

Rosen, Frederic (ed., tr.), 1831. The *Algebra* of Muhammad ben Musa, Edited and Translated. London: The Oriental Translation Fund.

Ruska, Julius, 1917. "Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst". *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse*, Jahrgang 1917, 2. Abhandlung.

Saidan, Ahmad S. (ed., tr.), 1978. The *Arithmetic* of al-Uqlīdisī. The Story of Hindu-Arabic Arithmetic as Told in *Kitāb al-Fuṣūl fī al-Ḥisāb al-Hindī* by Abū al-Ḥasan Aḥmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī written in Damascus in the Year 341 (A.D. 952/53). Translated and Annotated. Dordrecht: Reidel.

Saidan, Ahmed, 1987. "The *Takmila fi'l-Ḥisāb* of al-Baghdādī", pp. 437-443 dans David A. King & George Saliba (eds), *From Deferent to Equant: A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy*. (Annals of the New York Academy of Sciences, Volume 500). New York: New York Academy of Sciences.

Saliba, George A., 1972. "The Meaning of al-jabr wa'l-muqābalah". *Centaurus* 17 (1972-73), 189-204.

Sayılı, Aydın, 1962. *Abdülhamid ibn Türk'ün katışık denklemlerde mantıkî zaruretler adlı yazısı ve zamanın cebri (Logical Necessities in Mixed Equations by ʿAbd al Ḥamîd ibn Turk and the Algebra of his Time)*. (Publications of the Turkish Historical Society, Series VII, N° 41). Ankara: Türk Tarih Kurumu Basımevi. Reprint 1985.

Sesiano, Jacques, 1987. "A Treatise by al-Qabīṣī (Alchabitius) on Arithmetical Series", pp. 483-500 dans David A. King & George Saliba (eds), *From Deferent to Equant: A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy*. (Annals of the New York Academy of Sciences, Volume 500). New York: New York Academy of Sciences.

Siraždinov, S. X. (ed.), 1983. Muxammad ibn Musa al-Xorezmi *Matematičeskie traktaty*. Taškent: Izdatel'stvo »FAN« Uzbekskoj CCP.

Soubeyran, Denis, 1984. "Textes mathématiques de Mari". *Revue d'Assyriologie* **78**, 19-48.

Wiedemann, Eilhard, 1970. *Aufsätze zur arabischen Wissenschaftsgeschichte*. I-II. Mit einem Vorwort und Indices herausgegeben von Wolfdietrich Fischer. (Collectanea VI/1-2). Hildesheim & New York: Georg Olm.

Author's Address:

Jens Høyrup
Institute of Communication Research,
Educational Studies Studies
and Theory of Science
University of Roskilde
P. O. Box 260
DK-4000 Roskilde
Denmark

ISSN 0902-901X